



---

---

## Braunschweiger Schriften zur Mechanik

---

---

**Sebastian Hampel**

**Numerische Simulation der  
Schallausbreitung unter Berücksichtigung  
meteorologischer Einflüsse**

---

Mechanik-Zentrum

Technische Universität Braunschweig

Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 61-2006

# **Numerische Simulation der Schallausbreitung unter Berücksichtigung meteorologischer Einflüsse**

von

Sebastian Hampel

Institut für Angewandte Mechanik

Technische Universität Braunschweig

Herausgegeben vom Mechanik-Zentrum der  
Technischen Universität Braunschweig

Schriftleiter: Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Institut für Angewandte Mechanik  
Postfach 3329  
38023 Braunschweig

Tel.: 0531 / 391-7101  
Fax: 0531 / 391-5843

Vom Fachbereich für Bauingenieurwesen der Technischen Universität  
Braunschweig genehmigte Dissertation

Tag der Einreichung: 08.12.2005  
Tag der Prüfung: 28.02.2006

Berichter:  
Prof. Dr.-Ing. S. Langer  
Prof. Dr. rer. nat. H. Antes  
Prof. Dr.-Ing. J. Delfs

©Copyright 2006 S. Hampel, Braunschweig

BSM 61-2006  
ISBN 3-920395-60-3

Alle Rechte, insbesondere der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung  
des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

## **Kurzfassung**

Bei der Schallausbreitung im Freien treten z.B. im Vergleich zur Raum- oder Bauakustik zusätzliche Phänomene auf, die meteorologisch bedingt sind. Besonders die Refraktion infolge eines Wind- oder Temperaturprofils spielt eine große Rolle bei der Ausbreitung und muss daher bei der Simulation berücksichtigt werden. Weitere Besonderheiten sind neben dem inhomogenen Medium das halbumendliche Ausbreitungsgebiet und große Entfernungen zwischen der Schallquelle und dem interessierenden Immissionsort.

Für die numerische Simulation der Schallausbreitung im Freien existieren sehr unterschiedliche Berechnungsmodelle, wobei für den universellen Einsatz keines davon mit vertretbarem Aufwand alle Anforderungen zufriedenstellend erfüllt. Mit der Randelementmethode (BEM) als wellenbasiertes Verfahren können nur homogene Medien berechnet werden, geometrische Strahlenverfahren vernachlässigen den Wellencharakter des Schalls und somit z.B. Beugung.

In dieser Arbeit werden zunächst verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, die Problematik inhomogener Medien bei Verwendung der BEM zu überwinden. Die Vorteile der BEM liegen in der impliziten Berücksichtigung aller Wellenphänomene wie z.B. Beugung und die exakte Berechnung unendlicher Gebiete. Für typische Problemstellungen der Schallausbreitung unter Einfluss eines Wind- und Temperaturprofils wird schließlich ein hybrides Verfahren entwickelt, welches die Randelementmethode und ein Strahlenverfahren kombiniert, bei dem ein vertikales Profil der Atmosphäre vorgegeben werden kann. Dadurch wird sowohl der Wellencharakter des Schalls zur Erfassung von Beugung an Hindernissen berücksichtigt als auch eine Berechnung der Ausbreitung über große Distanzen unter Einfluss der Refraktion ermöglicht.

## **Abstract**

During outdoor sound propagation some additional meteorological phenomena appear compared to e.g. room or building acoustics. Refraction due to a wind or temperature profile plays an important role during the propagation and has to be taken into account for the simulation. Further characteristics beside the inhomogeneous medium are the semi-infinite propagation domain and large distances between the source and the receiver of interest.

For the numerical simulation of outdoor sound propagation several computation models exist. However, none of them implies all requirements and relevant phenomena with a reasonable effort and for general purpose. With the Boundary Element Method (BEM) as a wave-based method only homogeneous media can be considered. Geometrical methods such as ray tracing neglect the wave character and so e.g. diffraction.

In this work several possibilities are presented to overcome the problem of inhomogeneous media using the BEM. The advantages of the BEM are that wave phenomena are included implicitly and infinite domains can be handled easily and exactly. Furthermore, a hybrid method is developed to solve typical problems involving wind and temperature profiles. It combines the BEM and a ray method where a vertical profile of the atmosphere can be prescribed. On the one hand the model preserves the wave character of sound in order to represent diffraction at obstacles. On the other hand it allows to compute long distance propagation including refraction.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Stand der Forschung . . . . .	2
1.2	Ziele . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Akustische Wellenausbreitung . . . . .	7
2.1.1	Die Zustandsgleichung . . . . .	9
2.1.2	Die Wellengleichung . . . . .	11
2.1.3	Frequenzbereich . . . . .	12
2.2	Randwertproblem der Akustik . . . . .	13
2.3	Phänomene bei der Wellenausbreitung . . . . .	15
2.3.1	Reflexion . . . . .	15
2.3.2	Beugung . . . . .	17
2.3.3	Refraktion . . . . .	21
2.3.4	Fluiddämpfung . . . . .	23
2.4	Spezielle Schallfeldgrößen . . . . .	26
2.4.1	Schallpegel . . . . .	26
2.4.2	Relativer Schalldruckpegel . . . . .	26
2.4.3	Ansatz der effektiven Schallgeschwindigkeit . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Randelementmethoden (BEM)</b>	<b>29</b>
3.1	Randintegralgleichung . . . . .	29
3.1.1	Halbraum . . . . .	32
3.1.2	Punktquellen . . . . .	33
3.1.3	Beispiel . . . . .	34
3.2	Strömendes Medium . . . . .	37
3.2.1	Transformationsformulierung . . . . .	38
3.2.2	Modifizierte Fundamentallösung . . . . .	40
3.3	Geschichtetes Medium: Substrukturtechnik . . . . .	43
3.3.1	Kopplung von Teilgebieten mit ruhendem Medium . . . . .	43
3.3.2	Kopplung von Teilgebieten mit strömendem Medium . . . . .	48
3.4	Refraktierendes Medium: Konforme Abbildung . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Strahlenverfahren</b>	<b>57</b>
4.1	Geometrische Akustik . . . . .	57
4.2	Semianalytisches Verfahren nach SALOMONS . . . . .	59
4.2.1	Geometrische Lösung . . . . .	61
4.2.2	Kaustische Beugungsfelder . . . . .	65
4.2.3	Beispiel . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Kopplung von BEM und Strahlenverfahren</b>	<b>71</b>
5.1	Allgemeine Arten der Kopplung . . . . .	71
5.2	Spezielle Kopplung von BEM und Strahlenverfahren . . . . .	72
5.3	Kopplung mit der indirekten Randelementmethode . . . . .	74
5.3.1	Verifikation . . . . .	76
5.4	Kopplung mit der Methode der Fundamentallösungen . . . . .	82
5.4.1	Die MFS für akustische Probleme . . . . .	82
5.4.2	Lösung mit fixen Quellpositionen . . . . .	84
5.4.3	Reduktionsmodell mit Optimierung . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>93</b>
6.1	Fluid-Struktur-Interaktion an Schallschutzwänden . . . . .	93
6.2	Wirkung von Schallschutzmaßnahmen . . . . .	98
6.2.1	Schallschutzwand . . . . .	101
6.2.2	Lärmschutzwall . . . . .	106
6.2.3	Trog . . . . .	110
6.2.4	Vergleich der Schallschutzmaßnahmen . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>115</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>117</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Schall ist ein Phänomen, das stark entgegen gesetzte Empfindungen bei Menschen hervorrufen kann - je nach Qualität und Lautstärke des Schalls und abhängig vom Gemütszustand des Zuhörers. Wertende Begriffe, die diesen Gegensatz beschreiben, sind im positiven Sinne ein angenehmer Klang und im negativen Sinne störender Lärm.

Lange Zeit wurde Lärmbelastung als Gesundheitsschädigung unterschätzt, da sie beim Geschädigten meist keine äußerlichen Symptome hervorruft. In den letzten Jahren hat sich diese Situation insofern geändert, als die Sensibilisierung für das Thema voran geschritten ist. Vom Gesetzgeber werden strengere Richtlinien hinsichtlich der maximal zulässigen Lärmpegel erlassen. Zur Definition des Umweltschutzes gehört nach den neueren Normen als wesentlicher Teil der Schutz vor Lärm und Schwingungen. In Deutschland ist 1998 die Technische Anleitung zum Schutz gegen Lärm (TA Lärm) erschienen. Für die Europäische Union gilt seit Juni 2002 eine neue Richtlinie mit dem Ziel der Bewertung und Bekämpfung von Umgebungslärm nach objektiven Kriterien.

Die Forschung ist daher gefordert, neue Möglichkeiten im Bereich des Lärmschutzes zu entwickeln. Dazu gehört einerseits die Bekämpfung von Lärm dort, wo er entsteht. Leisere Motoren und Maschinen zu entwickeln, ist jedoch nur ein Teil der Aufgaben. Zum anderen muss der passive Schutz von Menschen bei gegebener Lärmsituation verbessert werden. Dabei können Wohn- bzw. Arbeitsbereiche durch verschiedene Maßnahmen abgeschirmt werden, z.B. durch bauliche Maßnahmen wie Schallschutzwände oder die Schalldämmung von Gebäuden.

Zwischen der Entstehung des Schalls und seiner Immission am Empfänger liegt die Schallausbreitung. Diese muss mit all ihren charakteristischen Phänomenen erfasst und verstanden werden, um die Situation beurteilen und geeignete Maßnahmen einleiten zu können. Gerade bei der Schallausbreitung im Freien spielen mehrere Phänomene zusammen, die eine zuverlässige Vorhersage für das Schallfeld bei bekannter Schallquelle und Umgebungssituation erschweren. Um dennoch bereits in der Planungs- und Entwicklungsphase eines Bauprojektes oder einer Schallschutzkonstruktion die resultierende Lärmsituation abschätzen zu können, ist die Entwicklung numerischer Simulationsverfahren erstrebenswert.

## 1.1 Stand der Forschung

Die Physik der Akustik wurde im vergangenen Jahrhundert sehr detailliert behandelt. Standardwerke wie die von MORSE/INGARD [39], PIERCE [41] oder SKUDRZYK [49] decken alle Bereiche der Akustik ab. Eine technisch orientierte Betrachtungsweise liegt [31] zugrunde. Sehr übersichtlich und anschaulich werden die wesentlichen Grundlagen in [38] und [51] behandelt. Die Untersuchung von Schallausbreitung im Freien führt auf eine Reihe von Phänomenen, die das Schallfeld maßgeblich beeinflussen. Zu diesen zählen u.a. Reflexion, Absorption, Beugung, Refraktion, Streuung und Fluiddämpfung der akustischen Wellen sowie Turbulenz durch Fluktuation der Materialeigenschaften im transportierenden Medium. In der englischsprachigen Literatur findet sich dieses Gebiet der Akustik meist unter dem Schlagwort *outdoor sound propagation*.

Phänomenologisch sind diese Effekte bereits seit längerem bekannt, die meisten konnten im 18. Jahrhundert qualitativ erforscht und erklärt werden. Entsprechend existieren zahlreiche Arbeiten, in denen diese Mechanismen aus verschiedenen Blickwinkeln analysiert werden. Einen Überblick über die wichtigsten Phänomene geben z.B. die Arbeiten von PIERCY ET AL[42] und EMBLETON[24]. Auf den Einfluss der Bodeneigenschaften bei der Reflexion konzentrieren sich DELANY/BAZLEY in [23] und entwickeln dort Impedanzmodelle mit unterschiedlicher Anzahl an Materialparametern. Demselben Effekt widmet sich auch ATTENBOROUGH in [5]. In den Normenwerken wie z.B. [56] wird der Einfluss dieser Phänomene in Form einer Schalldruckpegelerhöhung bzw. Zusatzdämpfung aus Faustformeln und an Hand von stilisierten vereinfachten Geometrien ermittelt.

Der Zusammenhang zwischen phänomenologischer Betrachtung der Schallausbreitung und verschiedenen numerischen Modellen stellt z.B. SALOMONS in [47] her. Zur numerischen Simulation gehört als erster Schritt die Modellbildung. In [58] werden die vereinfachenden Näherungen und Annahmen beschrieben und diskutiert, die ausgehend von der Realität über das physikalische Modell bis hin zum Rechenmodell getroffen werden. Des Weiteren werden die gängigen Rechenmodelle mit ihren Besonderheiten kurz erläutert.

Für die numerische Simulation der Schallausbreitung in geschlossenen Räumen haben sich die Finite Elemente Methoden (FEM) bewährt. Die Grundlagen dieser Methode liefern z.B. [8] und [63]. In [16] wird die Finite Elemente Methode erstmals für die Akustik formuliert. Sie kann zur Analyse von Fluid, Struktur oder deren Interaktion erfolgreich eingesetzt werden [1].

Für die Berechnung der Schallausbreitung im Freien sind Finite Elemente Methoden jedoch nicht sehr verbreitet. Andere Verfahren, die unendliche Gebiete ohne Diskretisierung berücksichtigen können und dabei die SOMMERFELDSche Abstrahlbedingung [50] erfüllen, um keine Reflexionen aus dem Unendlichen zu erhalten, erweisen sich hierfür als geeigneter.

Ein alternatives numerisches Verfahren für die Berechnung von Schallausbreitung im Freien ist z.B. das Finite Differenzen Verfahren, mit dem ein realistisches inhomogenes Windfeld im Gebiet berücksichtigt werden kann [12], [55], [52]. Als Nachteile des Verfahrens sind der hohe Rechenbedarf und die am künstlichen Gebietsrand auftretenden Reflexionen zu nennen.

Auf dem Gebiet der Strahlenverfahren (Raytracing) wurden bereits verschiedene Berechnungsmodelle entwickelt. Sie werden bevorzugt in der Raumakustik eingesetzt, wo unter Annahme eines homogenen Mediums gerade Schallstrahlen verwendet werden können. Die Anwendung



für die Schallausbreitung im Freien geht mit der Berücksichtigung von Refraktion und damit gekrümmten Schallstrahlen einher. Dies führt zu modifizierten Strahlenverfahren, bei denen die Ermittlung der Ausbreitungspfade einen großen Teil der gesamten Rechenzeit benötigt. Die meisten Strahlenverfahren, die eine Refraktion in Form von gekrümmten Schallstrahlen berücksichtigen, sind Zeitbereichsverfahren [10], [12], [28], [32], [35], die die Ausbreitung von transienten Signalen berechnen. Dem gegenüber stehen Verfahren im Frequenzbereich wie z.B. [44].

Die Entstehung der Randelementmethode (BEM, engl. Boundary Element Method) als numerisches Verfahren geht auf theoretische Untersuchungen an Randintegralgleichungen in den 60er Jahren zurück. Die Methode wurde in den darauf folgenden Jahrzehnten im Zuge der Entwicklung leistungsfähiger Rechenmaschinen verstärkt zum Gegenstand mathematischer und ingenieurwissenschaftlicher Forschung. Durch Werke wie z.B. [14], [15] und [13] wird die Methode einem breiteren Publikum zugänglich gemacht. Sie wird verstärkt zur Lösung von Differenzialgleichungen in Statik und Dynamik angewendet [3], [27].

Auch für die Akustik gewinnt die Randelementmethode in den letzten Jahrzehnten an Bedeutung und wird zunehmend in der Praxis eingesetzt. Die Grundlagen sowie zahlreiche Entwicklungen und Anwendungen, die den akustischen Bereich abdecken, sind z.B. in [19], [57] und [59] zu finden.

Im Zuge dieser Entwicklung werden Randelementformulierungen mit unterschiedlichem Fokus entwickelt: Mehrere Arbeiten befassen sich mit einer Formulierung für den Halbraum [48] [17]. Weitere Entwicklungen beinhalten die Erfassung einer homogenen Strömung im Medium der Wellenausbreitung, sowohl für den zweidimensionalen [22] als auch für den dreidimensionalen Raum [61],[54]. Sich bewegende schallabstrahlende Körper sind Gegenstand der Untersuchungen in [7].

Praktische Anleitungen zur Programmierung der Randelementmethode sowie numerische Aspekte finden sich beispielsweise in [60] und [9]. Zur Steigerung der Effizienz wird die Entwicklung auf dem Gebiet der Netzgenerierung und Gleichungslöser vorangetrieben [53]. Eine erhebliche Verringerung der Rechenzeiten kann mit der sog. Schnellen Randelementmethode erzielt werden [26].

Zu den Bemühungen um die Weiterentwicklung einzelner dieser Methoden werden in den letzten Jahren immer häufiger Ansätze für hybride Verfahren verfolgt. Durch die Kopplung von zwei oder mehreren Verfahren können die unterschiedlichen Vorteile der Einzelverfahren genutzt werden. Verschiedene Modelle existieren für die Kopplung von FEM und BEM, die für verschiedene Problemstellungen eingesetzt werden, z.B. [34], [62]. In [43] wird eine gekoppelte Berechnung mit BEM und einem PE-Verfahren (von engl. Parabolic Equation) vorgestellt. PE-Verfahren können eine in Ausbreitungsrichtung veränderliche Atmosphäre berücksichtigen, dagegen können Reflexionen gegen die Ausbreitungsrichtung sowie Beugung an Kanten mit dieser Methode nicht erfasst werden.

Eine weit verbreitete Anwendung bei der Schallausbreitung im Freien stellen Schallschutzwände dar. Es werden zahlreiche Untersuchungen hinsichtlich ihrer Wirksamkeit und Studien mit unterschiedlichen Formen von Schallschutzkonstruktionen durchgeführt, u.a. in [4], [6], [29] und [45].

## 1.2 Ziele

Ziel dieser Arbeit ist es, bereits bestehende Möglichkeiten darzulegen und neue Möglichkeiten zu finden, wie bei der numerischen Simulation von Schallausbreitung meteorologische Einflüsse berücksichtigt werden können. Dadurch sollen dem Ingenieur Werkzeuge bereit gestellt werden, die eine Prognose der Schallimmission für den praktischen Einsatz ermöglichen bzw. erleichtern.

Es werden zunächst verschiedene Methoden dargelegt, wie unter Verwendung der Randelementmethode einige der Effekte implementiert werden können, die bei der Schallausbreitung im Freien auftreten. Die Einsetzbarkeit der Methoden wird untersucht und an Hand von Beispielen erläutert.

Anschließend wird ein gekoppeltes numerisches Simulationsverfahren entwickelt, um gezielt mehrere Phänomene bei der Schallausbreitung über größere Distanzen zu berücksichtigen. Dabei kann ausgenutzt werden, dass einige Phänomene nur in einem bestimmten Bereich des Modells einen nennenswerten Einfluss haben. Die Berücksichtigung kann dann auf diesen Bereich begrenzt werden, um das Modell im übrigen Bereich möglichst einfach zu halten.

Für zahlreiche Anwendungen kann hinsichtlich der Charakteristiken bei der Schallausbreitung zwischen dem Nahfeld der Schallquelle und dem Fernfeld unterschieden werden. Häufig sind im Nahfeld bedingt durch bauliche Schallschutzmaßnahmen und komplexe Geometrie Mehrfachreflexionen und Beugung an den Hindernissen zu erwarten. Auf dem Ausbreitungsweg ins Fernfeld dagegen, der in seiner Längenskala das Nahfeld um ein Vielfaches übersteigt, dominiert das Phänomen der Refraktion, welches in einer inhomogenen Atmosphäre auftritt. Dieses Phänomen ist der zentrale Punkt für den Einsatz eines Strahlenverfahrens im gekoppelten Modell. Für die Berechnung von Beugung und Reflexionen ist die Randelementmethode besonders geeignet und wird daher im Nahfeld eingesetzt.

In dem neuen numerischen Simulationsverfahren werden diese beiden Methoden mit ihren sich ergänzenden Vorzügen gezielt eingesetzt, um alle diese Phänomene in *einem* Modell zu erfassen. Da für die Kopplung von Randelementmethode und Strahlenverfahren auf Grund der unterschiedlichen Eigenschaften der Verfahren die üblichen Kopplungsprozeduren nicht eingesetzt werden können, muss eine neue Art der Kopplung gefunden werden. In dieser Arbeit sollen Kopplungsmethoden entwickelt werden, um die Übergabe von Information zwischen den Verfahren zu ermöglichen.

Alle im Rahmen dieser Arbeit verwendeten und hier erstmals entwickelten numerischen Verfahren sind für dreidimensionale Probleme einsetzbar. Außer dem in Kapitel 4 erläuterten Strahlenverfahren werden alle Verfahren zusätzlich als 2D-Versionen in Computerprogrammen implementiert. Zur Anschaulichkeit bzw. zur Reduktion der Anzahl an Freiheitsgraden werden daher auch 2D-Beispiele behandelt und berechnet.

Die für den Einsatz von Berechnungsverfahren in der Akustik notwendigen Grundlagen werden in Kapitel 2 erläutert. Ausgehend von den Gleichungen, die die Physik der Wellenausbreitung beschreiben, werden des Weiteren alle in den Berechnungsmodellen berücksichtigten Phänomene bei der Schallausbreitung speziell im Freien beschrieben. Das Verständnis dieser Phänomene ist Voraussetzung für eine sinnvolle Modellbildung. Daran anschließend werden zusätzliche Schallfeldgrößen mit ihren Definitionen eingeführt, die für das weitere Verständnis der Arbeit

erforderlich sind.

Die für ein Berechnungsmodell zur Schallausbreitung im Freien erforderlichen Formulierungen und Aspekte der Randelementmethode (BEM) sind Gegenstand der Betrachtung in Kapitel 3. Dazu wird zunächst die direkte Randintegralgleichung hergeleitet, die die Wellenausbreitung in idealen kompressiblen Fluiden beschreibt. Anschließend werden einige Formen der Erweiterung dieser Formulierung bzw. ihres Einsatzes als numerische Methode gezeigt. Für die strenge Kopplung von Teilgebieten mit unterschiedlichen Materialeigenschaften wird die Substrukturtechnik eingeführt. Für die Wellenausbreitung in einem strömenden Fluid werden zwei Möglichkeiten vorgestellt. Es wird erstmals gezeigt, wie die Kopplung zweier Gebiete mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten mit Hilfe der Substrukturtechnik erfolgen kann. Die Implementierung einer refraktierenden Atmosphäre in ein BEM-Modell schließt das Kapitel ab. Eine zur BEM gänzlich verschiedene Herangehensweise an die Problematik der Schallausbreitung bieten die sogenannten Strahlenverfahren aus dem Bereich der geometrischen Akustik. In Kapitel 4 werden zunächst die charakteristischen Eigenschaften geometrischer Verfahren allgemein erläutert, um anschließend ein spezielles Verfahren vorzustellen. Das Hauptaugenmerk liegt auf der Berücksichtigung von Refraktion infolge einer geschichteten Atmosphäre. Die wesentlichen Merkmale des Strahlenverfahrens und deren Vorzüge gegenüber anderen Verfahren hinsichtlich der beabsichtigten Kopplung werden herausgestellt.

In Kapitel 5 werden zwei Kopplungsverfahren neu entwickelt, um BEM und Strahlenverfahren zu kombinieren. Zunächst wird die Art von Problemen erläutert, die mit einer derartigen Kopplung gelöst werden sollen. Die sich daraus ergebenden Anforderungen an die Kopplungsmethode werden ergänzt durch Einschränkungen und Besonderheiten, die sich aus den speziellen Eigenschaften der beiden numerischen Verfahren ableiten lassen. Es werden zwei Kopplungsmethoden entwickelt sowie deren Anwendung verifiziert und Parameter zur Optimierung der Methoden variiert. Randelementmethode und Strahlenverfahren können somit erstmals in einem gemeinsamen Modell eingesetzt werden.

In Kapitel 6 wird die Schallschutzwirkung von verschiedenen Konstruktionen analysiert und verglichen. Im einzelnen wird eine Schallschutzwand, ein Lärmschutzwall und ein Trog untersucht. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Einfluss einer geschichteten Atmosphäre auf die Schallausbreitung. Es werden Ergebnisse gezeigt, die in erster Linie mit dem hier entwickelten gekoppelten Modell aus BEM und Strahlenverfahren erzielt werden.



# Kapitel 2

## Grundlagen

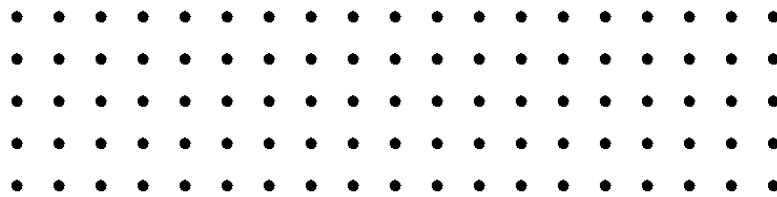
Für den Einsatz von Berechnungsverfahren in der Akustik sind einige Grundlagen als Werkzeuge notwendig, die in diesem Kapitel erläutert werden sollen. Zunächst werden in Abschnitt 2.1 die erforderlichen Gleichungen hergeleitet, die die akustische Wellenausbreitung beschreiben. In Abschnitt 2.2 wird das mit diesen Gleichungen aufgestellte Randwertproblem in der Akustik näher betrachtet. Die bei der Modellbildung zur Schallausbreitung im Freien wichtigen Phänomene sind Gegenstand des Abschnitts 2.3. Schließlich werden einige Schallfeldgrößen eingeführt und deren Anwendung für die Schallausbreitung im Freien erläutert, soweit sie zum weiteren Verständnis notwendig sind.

### 2.1 Akustische Wellenausbreitung

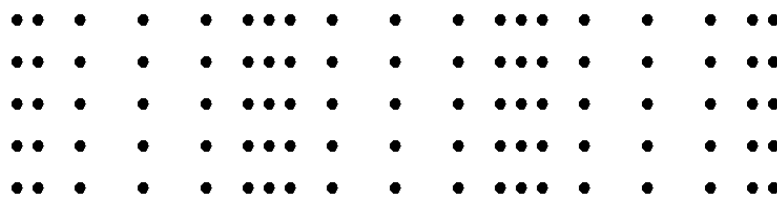
Ein Fluid, in dem sich eine Welle ausbreitet, kann als Verbund einzelner Partikel betrachtet werden, welche durch die benachbarten Teilchen zum Schwingen angeregt werden. In Abb. 2.1(a) ist ein ruhendes akustisches Fluid bestehend aus Partikeln dargestellt. Abb. 2.1(b) zeigt ein Momentanbild dieser Partikel während der Ausbreitung einer ebenen Schallwelle durch das Fluid. Die Fluidteilchen bewegen sich in Ausbreitungsrichtung hin und her. Die Geschwindigkeit dieser Teilchen wird *Schnelle* genannt. Davon abzugrenzen ist die *Schallgeschwindigkeit*, mit der sich die Welle im Fluid ausbreitet. Sie ist im Gegensatz zur Schnelle eine Materialkenngröße.

An Stellen mit erhöhter Teilchenkonzentration steigt der Schalldruck  $p$  (siehe Darstellung in Abb. 2.1(c)). Der Abstand zwischen zwei Wellenbergen wird *Wellenlänge*  $\lambda$  genannt. Eine Welle in einem (idealen) Gas unterscheidet sich von einer Welle in festen Körpern dadurch, dass keine Schubspannungen auftreten können. Die entstehende Welle nennt man *Druck- oder Kompressionswelle*.

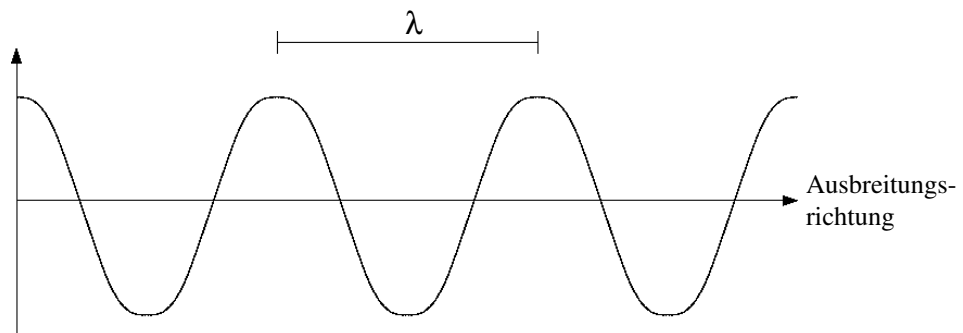
Im folgenden Abschnitt werden die Gleichungen hergeleitet, die diese Wellenausbreitung im Fluid mathematisch beschreiben.



(a) Fluid in Ruhe.



(b) Auslenkung der Teilchen infolge einer ebenen Welle.



(c) Druckverlauf infolge einer ebenen Welle.

*Abbildung 2.1:* Ebene Schallwelle in einem Fluid.

### 2.1.1 Die Zustandsgleichung

Um den physikalischen Vorgang der Wellenausbreitung in einem Gas zu beschreiben, beschränkt man sich auf die Betrachtung einiger geeigneter Zustandsgrößen. Für akustische Zwecke eignen sich dazu die Variablen Druck  $p_G$ , Dichte  $\rho_G$  und Temperatur  $T_G$ . Andere Größen wie Masse oder Volumen eines Kontrollgebiets sind dann redundant. Die Größen, die das Gas beschreiben, werden hier mit dem Index  $G$  bezeichnet, um sie von den reinen Schallfeldgrößen abzugrenzen, die weiter unten eingeführt werden. Einen Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Temperatur bei gegebener Gasmasse beschreibt die BOYLE-MARIOTTE-Gleichung. Da in der Akustik das Volumen oft unbegrenzt ist, wird der Quotient aus Masse und Volumen durch die Dichte ersetzt und man erhält (z.B. [21]):

$$p_G = \frac{R}{M_{mol}} \rho_G T_G, \quad (2.1)$$

wobei  $R$  die allgemeine Gaskonstante ist und  $M_{mol}$  die Molmasse des Gases. Diese Gleichung beschreibt allerdings nur den Zusammenhang zwischen drei variablen Größen Druck, Dichte und Temperatur. Um die Auswirkung der Änderung *einer* der Größen auf jede der beiden anderen eindeutig bestimmen zu können, ist also eine weitere Beziehung notwendig.

Betrachtet man die Wärmetransportvorgänge im Gas, so wird bei der Verdichtung eines Gases unterschiedlich viel Temperatur in das System gebracht, je nachdem wie schnell verdichtet wird. Eine rasche Komprimierung wird zumindest kurzfristig die Temperatur erhöhen. Die Zustandsänderung erfolgt also nicht isotherm. Die Wärmeleitfähigkeit des Gases entscheidet darüber, wie schnell diese Wärme in die Umgebung abtransportiert wird. Bei der Schallausbreitung in Luft geschieht die Verdichtung in der Regel sehr schnell, und da die Wärmeleitfähigkeit der Luft relativ gering ist, kann die Wärme nicht so schnell abgeleitet werden, wie sie produziert wird. Auf Grund der Kombination von schneller Dichteänderung und geringer Wärmeleitfähigkeit können Wärmetransportvorgänge bei der Schallausbreitung in Luft also vernachlässigt werden. Diese Art von Zustandsänderung nennt man *adiabatisch*. Diese weitere Information über den Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und Temperatur steckt in der *adiabatischen Zustandsgleichung*:

$$\frac{p_G}{p_0} = \left( \frac{\rho_G}{\rho_0} \right)^\kappa. \quad (2.2)$$

$p_0$  und  $\rho_0$  stehen für die Ruhegrößen des Drucks und der Dichte,  $\kappa$  ist der Adiabatenkoeffizient (mit  $\kappa = 1,4$  für Luft). Man erhält Gleichung (2.2), indem eine infinitesimale adiabatische Zustandsänderung unterteilt wird in einen isobaren (Druck konstant) und einen isochoren Schritt (Dichte konstant). In beiden Teilschritten werden Wärme Flüsse auftreten. Da der gesamte adiabatische Schritt jedoch ohne Wärmetransport auskommt, wird dann gefordert, dass die Summe der entstandenen Wärmeenergiemengen aus den beiden Teilschritten verschwindet.

Für die beschreibenden Größen ist generell eine Zerlegung in einen konstanten statischen Anteil (Index „0“) und einen variablen Anteil infolge des Schallfeldes (mit „'“ gekennzeichnet)

sinnvoll:

$$p_G = p_0 + p' \quad (2.3a)$$

$$\rho_G = \rho_0 + \rho' \quad (2.3b)$$

$$T_G = T_0 + T'. \quad (2.3c)$$

Die variablen Anteile werden Schallwechselgrößen genannt (z.B. Schallwechseldruck) und sind für Anwendungen in der Akustik üblicherweise sehr viel kleiner als ihre korrespondierenden statischen Größen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit zur Linearisierung. Setzt man Gl. (2.3) in Gl. (2.1) ein, vernachlässigt das Produkt von Schallwechselgrößen und teilt durch den Ruhedruck, dann erhält man folgende linearisierte Form der BOYLE-MARIOTTE-Gleichung:

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}. \quad (2.4)$$

Ebenso lässt sich die Adiabatangleichung (2.2) linearisieren, indem man den exponentiellen Term als Taylorreihe entwickelt und nach dem linearen Reihenglied abbricht:

$$\frac{p'}{p_0} = \kappa \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (2.5)$$

Führt man außerdem eine Konstante  $c$  ein mit  $c^2 = \kappa p_0 / \rho_0$ , dann erhält man die *Zustandsgleichung* des Gases

$$p' = \rho' c^2. \quad (2.6)$$

Mit den Gleichungen (2.4) und (2.6) kann nun jede Zustandsänderung eindeutig analysiert werden. Die eingeführte Konstante  $c$  ist dabei die Schallausbreitungsgeschwindigkeit im Fluid. Um diese für ein Material bestimmen zu können, stellt man Gl. (2.1) nur für die Ruhegrößen auf, teilt durch die Ruhedichte, setzt dies in  $c = \sqrt{\kappa p_0 / \rho_0}$  ein und erhält

$$c = \sqrt{\kappa \frac{R}{M_{Mol}} T_0}. \quad (2.7)$$

Anhand dieser Gleichung wird deutlich, dass die Schallausbreitungsgeschwindigkeit nur vom Material und von der absoluten Ruhetemperatur abhängt. Sie ist für die betrachteten idealen Gase also nicht etwa abhängig vom Ruhedruck oder der Ruhedichte. Vor allem die Tatsache, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Gasen nicht von der Frequenz abhängt, ist äußerst wichtig, der Vorgang ist also nicht dispersiv. Dispersion würde bedeuten, dass ein Ausgangssignal seine Form bei der Ausbreitung verändern würde. Das am Empfänger eintreffende Signal würde von Ort zu Ort variieren, nicht nur in der Intensität, sondern auch in den Frequenzanteilen. Damit wäre Sprache als Kommunikation praktisch unbrauchbar. Klangvolle Musik würde auf dem Weg zum geeigneten Zuhörerrohr wohl ungenießbar verfälscht.



## 2.1.2 Die Wellengleichung

Um das Fortschreiten von Kompressionswellen in Gasen zu beschreiben, werden zusätzlich zu der bereits im Abschnitt 2.1.1 hergeleiteten Zustandsgleichung (2.6) zwei physikalische Gesetze herangezogen, die Massenerhaltung und die Impulserhaltung. Da im Weiteren mit den Variablen  $p$  und  $\rho$  stets die Schallwechselgrößen gemeint sind, wird auf die explizite Kennzeichnung aus Abschnitt 2.1.1 mit „'“ verzichtet.

Die Massenerhaltung besagt, dass in einem betrachteten infinitesimalen Element die Masse im Element verglichen mit dem Ruhezustand konstant bleibt, auch wenn sich Volumen, Druck und Dichte ändern. Die daraus resultierende *Kontinuitätsgleichung* lautet für den dreidimensionalen Fall nach der Linearisierung ( $\rho \ll \rho_0$ )

$$\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{\partial \xi_y}{\partial y} - \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = -\nabla \xi. \quad (2.8)$$

Der Vektor  $\xi$  bezeichnet dabei die Verschiebung. Differenziert man Gl. (2.8) nach der Zeit und ersetzt die Zeitableitung der Verschiebung durch die Schnelle  $\mathbf{v}$ , so erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.9)$$

oder in kompakter Schreibweise

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.10)$$

Ein Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Volumenelement bzw. das zweite NEWTONsche Gesetz (Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung) liefert die *Impulserhaltungsgleichungen* für alle Raumrichtungen:

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.11a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.11b)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.11c)$$

bzw. wieder in der kompakteren Vektorschreibweise

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (2.12)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.10) und die Impulserhaltungsgleichung (2.12) - auch Bewegungsgleichung genannt - müssen mit der Zustandsgleichung (2.6) kombiniert werden. Eliminiert man  $\mathbf{v}$  aus (2.10) und (2.12), leitet Gl. (2.12) partiell nach den Raumrichtungen ab und setzt sie in die nach  $t$  differenzierte Gl. (2.10) ein und ersetzt schließlich die Schalldichte  $\rho$  mittels Gl. (2.6), so erhält man die *skalare Wellengleichung*:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2.13)$$

Häufig ist an Stelle dieser Druckformulierung auch die Verwendung des Geschwindigkeitspotenzials  $\phi$  als führende Feldgröße geeignet. Diese Formulierung mit dem Potenzial  $\phi$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}$ , welches definiert ist als

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi, \quad (2.14)$$

kann allerdings nur für wirbelfreie Felder ( $\mathbf{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) eingesetzt werden. Die Wellengleichung kann analog zu (2.13) auch mit dem Potenzial  $\phi$  geschrieben werden:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.15)$$

Die Beziehung zwischen den Größen  $p$  und  $\phi$  ist für ein ruhendes Medium gegeben durch

$$p = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Frequenzbereich

In der skalaren Wellengleichung (2.13) ist als Variable die Zeit  $t$  enthalten. Die Gleichung wird für eine Zeitbereichsbetrachtung verwendet, d.h. wenn der Verlauf der Feldgröße auf der Zeitskala von Interesse ist. Dies ist insbesondere bei Problemen mit Einschwingvorgängen der Fall. Eine alternative Darstellung bietet der *Frequenzbereich*. Durch eine FOURIER-Transformation kann ein beliebiges Signal in seine harmonischen Anteile zerlegt werden. Durch diese Integraltransformation ändern sich die Kenngrößen und Unbekannten. Die Abhängigkeit von der Zeit wird auf die Frequenz als variable Größe übertragen. Die Skala ist keine Zeitachse mehr, sondern ein Frequenzspektrum.

Ist das betrachtete Signal harmonisch, d.h. hat die Feldgröße entlang der Zeitachse einen sinusförmigen Verlauf, dann vereinfacht sich diese Umformung und man ersetzt den orts- und zeitabhängigen Druck mit Hilfe des separierten Ansatzes:

$$p(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \quad (2.17)$$

Die komplexen Größen des Frequenzbereichs werden hier durch „ $\hat{\phantom{x}}$ “ gekennzeichnet. Der zeitliche Verlauf hängt somit für einen bestimmten Ortspunkt nur von der Frequenz ab, weshalb diese Darstellung als Frequenzbereichform bezeichnet wird. Die reelle physikalische Größe im Zeitverlauf wird hierbei jedoch nur durch den Realteil  $\Re\{p(\mathbf{x}, t)\}$  beschrieben.

Einsetzen des harmonischen Zeitansatzes (2.17) in (2.13) ergibt die HELMHOLTZ-Gleichung

$$\Delta\hat{p} + k^2\hat{p} = 0 \quad (2.18)$$

mit der Wellenzahl  $k = \omega/c$ . Sowohl in Gleichung (2.17) als auch in (2.18) kann der Druck  $p$  durch das Geschwindigkeitspotenzial  $\phi$  ersetzt werden. Die Beziehung (2.16) zwischen  $p$  und  $\phi$  in den Frequenzbereich transformiert lautet

$$\hat{p} = \rho_0 i\omega\hat{\phi}. \quad (2.19)$$

## 2.2 Randwertproblem der Akustik

Insbesondere in Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit wird die Lösung von sog. *Randwertproblemen* erläutert. Ein Randwertproblem setzt sich aus einer die Physik beschreibenden Differenzialgleichung und Randbedingungen zusammen.

Eine Klassifikation innerhalb der Randwertprobleme kann unter verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. Man unterscheidet hinsichtlich des betrachteten Gebiets  $\Omega$  zwischen *Innenraum-* und *Außenraumproblemen*. Handelt es sich wie in Abb. 2.2(a) um ein abgeschlossenes, vollständig vom Rand  $\Gamma$  umgebenes Gebiet, so spricht man von einem Innenraumproblem. Erstreckt sich das Gebiet ins Unendliche und ist nicht oder nur teilweise durch Rand begrenzt, so handelt es sich entsprechend um ein Außenraumproblem, wie in Abb. 2.2(b) dargestellt. Der Begriff *Innenpunkt* bezeichnet jeweils einen Punkt im Gebiet, also  $P_i \in \Omega$ .

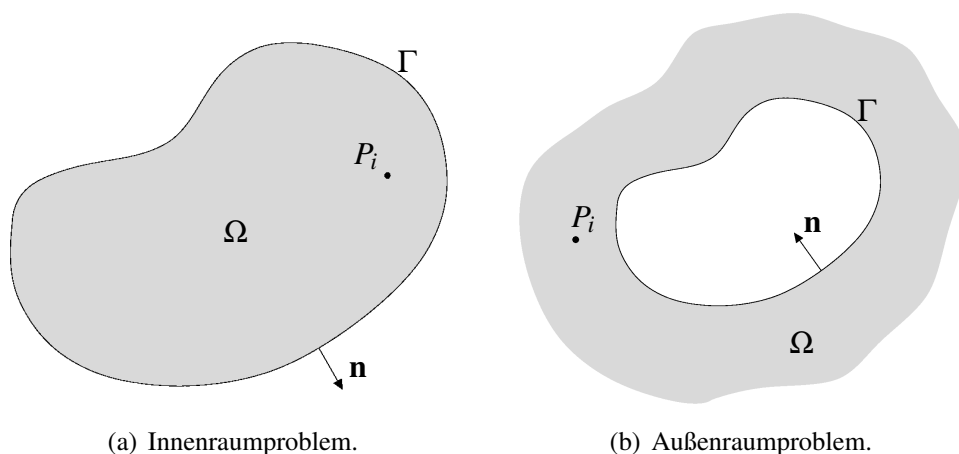


Abbildung 2.2: Bezeichnungen für ein Innen- bzw. Außenraumproblem.

Man unterscheidet nach den Eigenschaften der Differenzialoperatoren und deren Koeffizienten zwischen *elliptischen*, *parabolischen* und *hyperbolischen* Differenzialgleichungen. Die in Abschnitt 2.1.2 hergeleitete skalare Wellengleichung (2.13) ist vom hyperbolischen Typ, während die HELMHOLTZ-Gleichung (2.18) zu den elliptischen Differenzialgleichungen zählt.

Des Weiteren werden verschiedene Arten von Randbedingungen unterschieden. Bei der DIRICHLETSchen Randbedingung wird die führende Feldgröße - in der Akustik meist der Druck  $p$  - vorgegeben zu

$$p(x) = \bar{p}, \quad x \in \Gamma_D. \quad (2.20)$$

Die NEUMANN-Randbedingung schreibt den Fluss  $q$  vor, der die Normalenableitung der Feldgröße auf dem Rand darstellt:

$$q(x) = \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{q}, \quad x \in \Gamma_N. \quad (2.21)$$

Tritt nur einer dieser Randbedingungstypen im Problem auf, so spricht man von einem reinen

DIRICHLET- bzw. NEUMANN-Problem. Sind beide Arten vertreten, handelt es sich um ein *gemischtes Randwertproblem*.

Eine zusätzliche Randbedingung stellt die Linearkombination der beiden dar, die als ROBINSche Randbedingung oder auch Randbedingung der dritten Art bezeichnet wird. Sie kann allgemein mit zwei Parametern  $a$  und  $b$  formuliert werden als

$$\frac{\partial p}{\partial n} + ap(x) = b, \quad x \in \Gamma_R. \quad (2.22)$$

In der Akustik ist die ROBINSche Randbedingung von großer Bedeutung, da auf diese Weise absorbierende Oberflächen modelliert werden können. Mit der Impedanz  $Z$  der Oberfläche kann die Randbedingung auch geschrieben werden als

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{ikZ_F}{Z} p(x) = 0, \quad x \in \Gamma_R, \quad (2.23)$$

wobei  $Z_F = \rho c$  die charakteristische Impedanz des angrenzenden Fluids ist. Für die Impedanz  $Z$  als Randbedingung kann allgemein geschrieben werden:

$$Z = \frac{p}{v_n}, \quad (2.24)$$

wobei  $v_n$  die Komponente der Schnelle in Normalenrichtung auf dem Rand  $\Gamma$  bezeichnet. Die Impedanz  $Z$  kann für ein bestimmtes Material z.B. nach Gleichung (2.29) ermittelt werden.

Eine spezielle Randbedingung stellt bei den Außenraumproblemen die sog. SOMMERFELDSche *Abstrahlbedingung* dar. Sie muss auf dem Rand  $\Gamma_\infty$ , d.h. im Unendlichen erfüllt sein und gewährleistet, dass an diesem Rand keine Reflexionen und damit keine ins Gebiet zurücklaufenden Wellen auftreten:

$$\frac{\partial p}{\partial r} + ikp = o(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Vergleicht man die linke Seite der Gleichungen (2.23) und (2.25), so wird deutlich, dass es sich bei der SOMMERFELDSchen Abstrahlbedingung um eine spezielle Impedanz-Randbedingung mit  $Z = Z_F$  handelt.

Bei der Formulierung eines Randwertproblems im Innenraum ist zu beachten, dass für bestimmte Frequenzen Resonanzen auftreten, an denen die Lösung für ein nicht-viskoses Fluid unendlich groß wird. Darüber hinaus ist die Lösung eines reinen NEUMANN-Problems im Innenraum nicht eindeutig und kann nur bis auf einen beliebigen konstanten Wert bestimmt werden. Für das Außenraumproblem muss die SOMMERFELDSche *Abstrahlbedingung* (2.25) erfüllt werden, um eine eindeutige Lösung zu gewährleisten. Ausführlich wird diese Eindeutigkeitsproblematik z.B. in [53] behandelt.

Auf dem Rand  $\Gamma$  ergibt sich zwischen Schnelle  $v_n$  und Drucks  $p$  die Beziehung

$$v_n = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial n}. \quad (2.26)$$

Im Gebiet  $\Omega$  ist die Beziehung (2.26) allgemein für jede an Stelle von  $n$  gewählte Richtung gültig.

## 2.3 Phänomene bei der Wellenausbreitung

In diesem Abschnitt werden die Phänomene Reflexion, Beugung, Refraktion und Fluididdämpfung näher erläutert, die bei der Schallausbreitung im Freien eine wichtige Rolle spielen. Die ersten drei davon können anschaulich anhand des HUYGENSSchen Prinzips erklärt werden. Es besagt, dass jeder Punkt, der durch eine eintreffende Welle angeregt wird, gleichzeitig Ausgangspunkt einer neuen Welle ist. Diese neuen Wellen werden als *Elementarwellen* bezeichnet und sind im Fall der Schallausbreitung Kugelwellen. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die *Wellenfront*. In Analogie zum Licht spricht man auch beim Schall von Strahlen. Ein *Schallstrahl* beschreibt den Pfad, den ein Punkt auf der Wellenfront beim Fortschreiten der Welle durchläuft. Im ruhenden Medium verlaufen die Schallstrahlen normal zur Wellenfront. Ein weiterer Effekt, der bei der Schallausbreitung im Freien auftreten kann, ist Turbulenz. Diese zu erfassen ist äußerst schwierig, da es sich um stochastische Störungen der Materialeigenschaften handelt. Es gibt Ansätze in Strahlenverfahren, in denen Turbulenz die Kohärenz zwischen verschiedenen Schallstrahlen aufhebt, wodurch die Extrema konstruktiver und destruktiver Interferenzen abgeschwächt werden. In dieser Arbeit wird Turbulenz jedoch nicht weiter berücksichtigt.

### 2.3.1 Reflexion

Trifft eine Schallwelle auf die Grenze zweier Medien, dann wird sie im allgemeinen zu einem Teil reflektiert und zum anderen Teil transmittiert bzw. an einer rauhen Oberflächen zusätzlich absorbiert. In diesem Abschnitt ist nur der reflektierte Teil Gegenstand der Betrachtung.

Die Reflexion von Schallwellen wird durch einen Reflexionskoeffizienten  $R$  beschrieben. Als komplexe Größe beschreibt er das Verhältnis des Drucks  $p_r$  der reflektierten Welle zum Druck  $p_e$  der einfallenden Welle und enthält sowohl Amplituden- als auch Phaseninformation:

$$R = \frac{p_r}{p_e} \quad (2.27)$$

In Abb. 2.3 wird eine ebene Welle betrachtet, welche an einer Mediengrenze reflektiert wird. Dargestellt sind drei Schallstrahlen, die Wellenfront verläuft orthogonal dazu. Die einfallende Wellenfront kommt aus dem Medium 1 und trifft unter einem Winkel  $\theta_e$  zur Normalen auf die Grenzfläche auf. Analysiert man diesen Vorgang anschaulich im Zeitbereich, dann treffen benachbarte Punkte einer Wellenfront nacheinander auf die Grenzfläche auf. Nach dem HUYGENSSchen Prinzip kann man jeden dieser Punkte auf der Grenzfläche als Ursprung einer neuen Elementarwelle betrachten, die sich von dort (halbkreisförmig) zurück ins Medium 1 ausbreitet. Wenn die Wellenfront im Punkt  $A_3$  um  $\Delta t$  später auftrifft als in Punkt  $A_1$ , dann hat sich die Elementarwelle in Punkt  $A_1$  zu diesem Zeitpunkt schon in einem Radius  $c_1 \Delta t$  ausgebreitet. Die Einhüllende an alle reflektierten Elementarwellenfronten ergibt wieder eine ebene Wellenfront (in Abb. 2.3 gestrichelt angedeutet). Aus der Geometrie lässt sich das *Reflexionsgesetz*  $\theta_e = \theta_r = \theta$  ermitteln, d.h. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Diese Beziehung ist unabhängig vom Material der beiden Medien.

Der Reflexionskoeffizient  $R_p$  für ebene Wellen kann aus der Übergangsbedingung hergeleitet werden, dass sowohl der Druck als auch die Schnelle in Normalenrichtung zur Grenzfläche

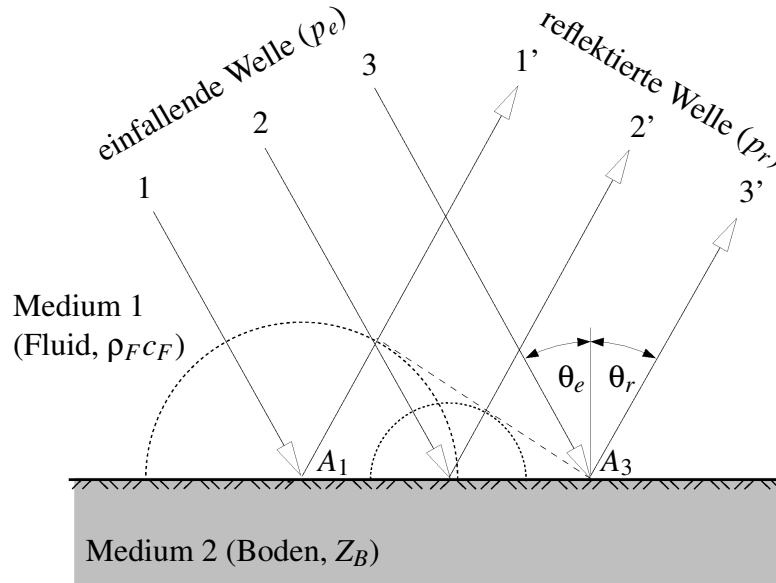


Abbildung 2.3: Reflexion einer ebenen Schallwelle an einer Mediengrenze.

stetig sein müssen, siehe z.B. [47]. Er ergibt sich daraus zu

$$R_p = \frac{Z_B \cos \theta - 1}{Z_B \cos \theta + 1} \quad (2.28)$$

Dabei ist  $Z_B$  die normierte akustische Impedanz des Mediums 2 (Boden). Diese ist normiert in Bezug auf die charakteristische Impedanz  $Z_F = \rho_F c_F$  des angrenzenden Fluids (Medium 1). Die Größe  $Z_B$  kann z.B. nach dem Ein-Parameter-Modell von DELANY/BAZLEY [23] bestimmt werden zu:

$$Z_B(f) = 1.0 + 9.08 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.75} + i 11.9 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.73}. \quad (2.29)$$

Die Impedanz hängt in diesem Modell nur von einem Bodenkennwert, dem Durchflusswiderstand  $\sigma$ , und der Anregungsfrequenz  $f$  ab. Da es sich um eine empirische, einheitenbehaftete Formel handelt, müssen die Werte für  $\sigma$  hier in der Einheit  $[kPa \cdot s \cdot m^{-2}]$  bzw.  $[g \cdot cm^{-3} \cdot s^{-1}]$  und die Frequenz in  $[Hz]$  eingesetzt werden. Einige Werte für  $\sigma$  sind in Tabelle 2.1 angegeben.

Für den Fall einer schallharten Oberfläche ( $Z_B = \infty$ ) ergibt sich der Reflexionsfaktor aus (2.28) zu  $R_p = 1$ , für die ideal schallweiche Grenzfläche ( $Z_B = 0$ ) folgt  $R_p = -1$ . Die Reflexion wird häufig auch in Form des *Absorptionskoeffizienten*  $\alpha$  angegeben:

$$\alpha = 1 - R^2. \quad (2.30)$$

In einiger Entfernung von der Quelle kann jede Wellenfront als eben approximiert werden. Für eine genauere Lösung bei Reflexionsproblemen mit Kugelwellen existieren jedoch auch einige sehr komplexe Ansätze für Reflexionskoeffizienten von Kugelwellen, z.B. in [47].

Oberflächenbelag	Durchflusswiderstand $\sigma [kPa s m^{-2}]$
Schnee	15 – 30
Waldboden	20 – 80
Gras	150 – 300
Sand	800 – 2500
Asphalt, Beton	> 20000

Tabelle 2.1: Werte für den Durchflusswiderstand  $\sigma$  des Bodens

### 2.3.2 Beugung

Unter Beugung versteht man die vermeintliche Änderung der Ausbreitungsrichtung von Schallwellen an Hindernissen. Ebene Schallwellen verlieren durch Beugung ihre charakteristische Form. Dies kommt daher, dass sich Wellenfronten aus Formen von unendlich vielen Elementarwellen zusammensetzen - im Dreidimensionalen sind dies Kugelwellen. An den Beugungskanten wird diese Überlagerung von Elementarwellen teilweise aufgespalten und es entsteht eine veränderte Form der Wellenfront. Diese veränderte Form kann wieder mit Hilfe des HUYGENSSchen Prinzips bestimmt werden und ist abhängig davon, welche Elementarwellen durch das Hindernis abgeschirmt werden.

Beugung tritt grundsätzlich bei allen Wellen auf, allerdings in stark unterschiedlichem Maße. Dies hängt vom Verhältnis der Wellenlänge  $\lambda$  zur charakteristischen Länge  $l_{char}$  des Hindernisses ab, an dem die Welle gebeugt wird:

$$\frac{\lambda}{l_{char}} = \frac{c}{f l_{char}}. \quad (2.31)$$

Ist dieses Verhältnis groß, so spielt Beugung eine wichtige Rolle. Ist das Ausbreitungsmedium (z.B. Luft,  $c_L$ ) und ein Hindernis mit  $l_{char}$  vorgegeben, dann ist die Beugungswirkung nur von der Frequenz abhängig. Mit steigender Frequenz  $f$  und damit kleineren Wellenlängen  $\lambda$  nimmt der Effekt der Beugung immer mehr ab. Bei hohen Frequenzen kann also annähernd davon ausgegangen werden, dass hinter Kanten und Hindernissen echte Schattenzonen entstehen, weil kein Schall durch Beugung hinter das Hindernis gelangt.

Ein Beispiel hierfür ist der Lichteinfall durch Tür- oder Fensteröffnungen, hinter denen sich ein sehr scharfer Übergang von beleuchteter Fläche zur Schattenzone abzeichnet. Die Wellenlänge des für uns sichtbaren Lichts liegt unter einem Mikrometer und ist somit um mehrere Größenordnungen kleiner als die typischen Abmessungen von Türen oder Fenstern. Beugung spielt daher bei der Ausbreitung von Licht in Räumen fast keine Rolle. Bei Schallwellen in Luft liegen die üblicherweise als störend empfundenen Frequenzen etwa zwischen  $100 Hz$  und  $3000 Hz$ . Die zugehörigen Wellenlängen liegen mit  $3,4 m$  bis  $11 cm$  im Bereich der charakteristischen Hindernis- bzw. Spaltlänge in Gebäuden. Der Schall wird daher sehr stark auch in die geometrischen Schattenzonen hinein gebeugt.

Abb. 2.4 zeigt die Wirkung einer Schallschutzmauer für zwei unterschiedliche Frequenzen. Das Beispiel ist mit der 3D-Randelementmethode im Frequenzbereich gerechnet. Dargestellt ist die

Schalldruckamplitude im logarithmischen Maßstab (entsprechend einer  $dB$ -Skala) infolge einer Punktquelle nahe der Mauer. Je dunkler die Stellen in der Darstellung gekennzeichnet sind, desto höher sind die Schalldruckamplituden. Die Quellintensität ist frequenzabhängig skaliert, um die Ergebnisse für beide Frequenzen vergleichbar zu machen. Für tiefe Frequenzen wie  $20\text{ Hz}$  wird der Schall deutlich um und über die Mauer gebeugt, diese hat praktisch keine Abschirmwirkung gegen die Schallquelle. Bei einer Frequenz von  $200\text{ Hz}$  sieht man ein qualitativ sehr unterschiedliches Ergebnis. Das Gebiet hinter der Schallschutzmauer wird deutlich besser abgeschirmt, weil der Effekt der Beugung viel geringer ist.

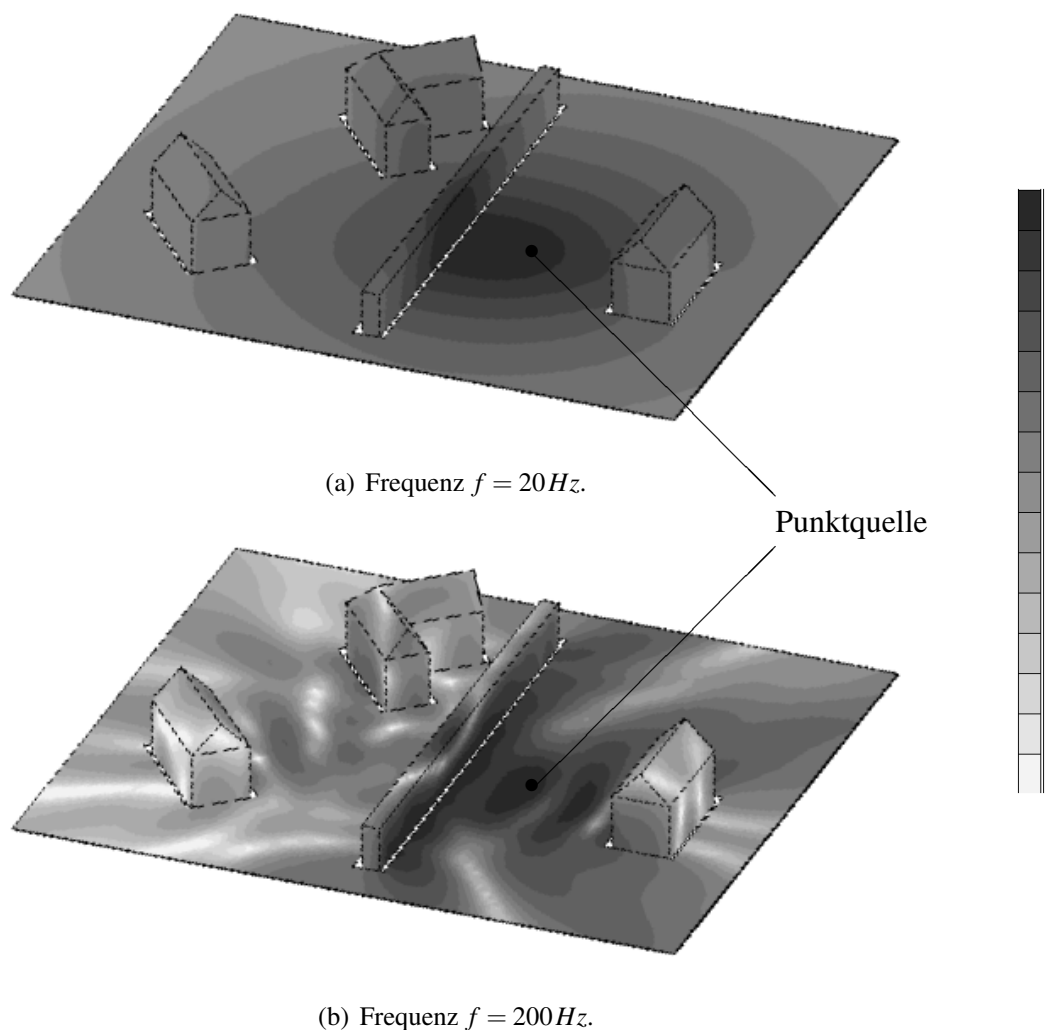


Abbildung 2.4: Stark unterschiedlicher Abschirmungseffekt einer Schallschutzmauer für verschiedene Frequenzen: a)  $20\text{ Hz}$  b)  $200\text{ Hz}$ .

Die Abbildung 2.5 zeigt die Beugung an einer Mauer für die Anregung mit einer niedrigen ( $f = 50\text{ Hz}$ ) bzw. einer hohen Frequenz ( $f = 1000\text{ Hz}$ ). Dieses 2D-Beispiel wird ebenfalls mit



der Randelementmethode im Frequenzbereich berechnet. Der komplexe Druck  $\hat{p}(\mathbf{x})$  wird in einer Nachlaufrechnung mit Hilfe der Beziehung

$$p(\mathbf{x}, t) = \Re\{\hat{p}(\mathbf{x})e^{i\omega t}\} \quad (2.32)$$

in ein reelles Zeitsignal  $p(\mathbf{x}, t)$  umgerechnet. Dargestellt ist für den konstanten Zeitpunkt  $t_0$  ein Schnitt orthogonal zu einer sehr langen Mauer (2D-Simulation) und eine Linienquelle, die monofrequent anregt.

Bei der niedrigen Frequenz ist keine deutliche Abschirmwirkung entlang der geometrischen Schallschattengrenze erkennbar. Diese verläuft in der Verlängerung der imaginären Linie Punktquelle-Maueroberkante. Die Schallwellen werden um die Kante herum gebeugt. Bei der höheren Frequenz dagegen sieht man eine scharf abgetrennte Schattenzone mit nur sehr wenig Beugungseinflüssen.

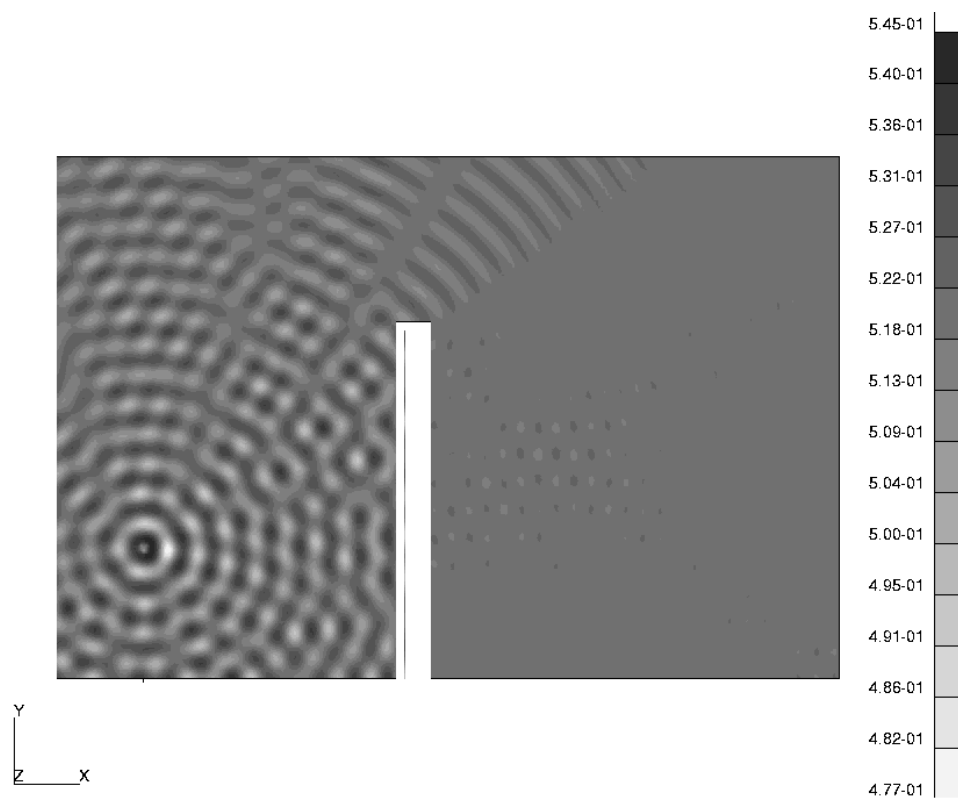
(a) Frequenz  $f = 50 \text{ Hz}$ .(b) Frequenz  $f = 1000 \text{ Hz}$ .

Abbildung 2.5: Effekt der Beugung an einer Schallschutzmauer für eine niedrige und eine hohe Frequenz.

### 2.3.3 Refraktion

Die Änderung der Ausbreitungsrichtung von Schallwellen an Mediumsgrenzen wird als Refraktion oder Brechung bezeichnet. Diese Richtungsänderung wird hervorgerufen durch eine Änderung der Materialeigenschaften. Entscheidend ist die Änderung der Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Diese berechnet sich bei Gasen nach Gleichung 2.7.

In Abb. 2.6 wird eine ebene Welle betrachtet, welche an der Grenze zweier Medien mit unterschiedlichen Schallausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  gebrochen wird. Die Wellenfront (gestrichelt gezeichnet), die senkrecht auf den drei eingezeichneten Schallstrahlen steht, kommt aus dem Medium 1 und trifft unter einem Winkel  $\theta_e$  zur Normalen auf die Grenzfläche auf. Nach dem HUYGENSSchen Prinzip kann man jeden der Punkte auf der Grenzfläche, in denen die Wellenfront nacheinander auftrifft, als Ursprung einer neuen Elementarwelle betrachten, die sich von dort ins Medium 2 ausbreitet. Wenn die Wellenfront im Punkt  $A_3$  um  $\Delta t$  später auftrifft als in Punkt  $A_1$ , dann hat sich die Elementarwelle in Punkt  $A_1$  zu diesem Zeitpunkt schon in einem Radius  $c_2 \Delta t$  in Medium 2 ausgebreitet. In Abb. 2.6 sind die Elementarwellen zweier Punkte auf der Grenzfläche als Halbkreise dargestellt. Die Einhüllende an alle Elementarwellenfronten in Medium 2 ergibt wieder eine ebene Wellenfront, die allerdings nicht mehr den Winkel  $\theta_e$  mit der Normalen auf die Grenzfläche einschließt, sondern einen kleineren Winkel  $\theta_t$ . Die Welle wird also zum Lot hin gebrochen, da der Übergang in ein Medium mit geringerer Schallgeschwindigkeit erfolgt. Beim Übergang in ein Medium mit höherer Schallgeschwindigkeit wird die Welle dagegen vom Lot weg gebrochen. Die Beziehung der Winkel in Abhängigkeit der Schallausbreitungsgeschwindigkeiten beschreibt das SNELLIUSSche Refraktionsgesetz:

$$\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (2.33)$$

Dies korreliert mit dem Prinzip von FERMAT, welches besagt, dass sich der Schall immer auf dem *schnellsten* Weg ausbreitet, nicht unbedingt auf dem kürzesten. Betrachtet man z.B. in Abb. 2.6 zwei Punkte in den beiden unterschiedlichen Medien, dann wird sich der Schall nicht auf der Verbindungsstrecke ausbreiten. Er wird sich vielmehr im Medium mit der höheren Schallgeschwindigkeit  $c_1$  auf einem etwas längeren Weg zur Grenzfläche fortpflanzen und dafür eine kürzere Strecke im Medium mit geringerer Schallgeschwindigkeit  $c_2$  zurücklegen.

Die Refraktion von Wellen kann jedoch nicht nur an Mediengrenzen erfolgen, wo sich Materialeigenschaften *sprunghaft* ändern, sondern sie kann auch kontinuierlich stattfinden, wenn sich die Materialeigenschaften in Ausbreitungsrichtung *stetig* ändern. Dies ist z.B. für ein Wind- oder Temperaturprofil der Fall. Beides bewirkt eine Änderung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , was die Voraussetzung für den Refraktionseffekt ist. Abb. 2.7(a) zeigt die Situation für Temperaturinversion und Abb. 2.7(b) für ein mit der Höhe abnehmendes Temperaturprofil. In Abb. 2.7(c) ist die kontinuierliche Refraktion infolge eines Windgeschwindigkeitsprofils dargestellt.

Für ein Temperaturprofil ergibt sich ein zur Quellposition achsensymmetrisches Schallfeld, da Temperatur im Gegensatz zum Wind ein skalares Feld und kein Vektorfeld ist. Eine mit der Höhe abnehmende Temperatur (Normalwetterlage) entspricht einer Aufwärtsrefraktion, eine mit der Höhe zunehmende Temperatur (Inversionswetterlage) bewirkt eine Abwärtsrefraktion.

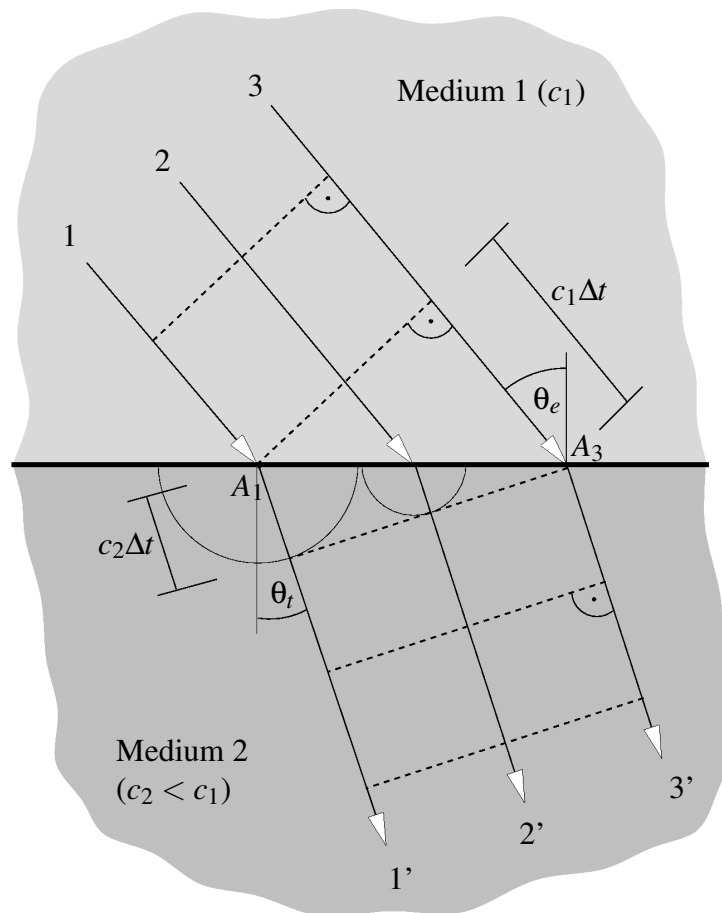


Abbildung 2.6: Refraktion einer ebenen Schallwelle an einer Mediengrenze.

Im Falle eines Windfeldes ist die Windrichtung entscheidend. Bei Schallausbreitung in Mitwindrichtung (Luvseite der Quelle) bewirkt das Windfeld eine Erhöhung der effektiven Schallgeschwindigkeit, diese steigt mit zunehmender Höhe an und die Schallstrahlen werden zum Boden hin refraktiert. Bei Ausbreitung entgegen der Windrichtung (Leeseite der Quelle) wird die effektive Schallgeschwindigkeit reduziert. Da die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zu- und damit die effektive Schallgeschwindigkeit abnimmt, werden die Schallstrahlen auf dieser Seite der Quelle vom Boden weg gebrochen.

Im Fall der abwärts refraktierenden Atmosphäre wird die Energie nicht nach oben und damit vom Empfänger weg gebrochen, sondern bündelt sich am Boden. Der Schall kann auf seinem Ausbreitungsweg mehrfach am Boden reflektiert werden und somit über größere Distanzen hörbar bleiben. Da dies i.d.R. den ungünstigsten und damit maßgebenden Lastfall darstellt, wird in der vorliegenden Arbeit in Zusammenhang mit Refraktion stets von einer Mitwind- bzw. Inversionswetterlage ausgegangen.

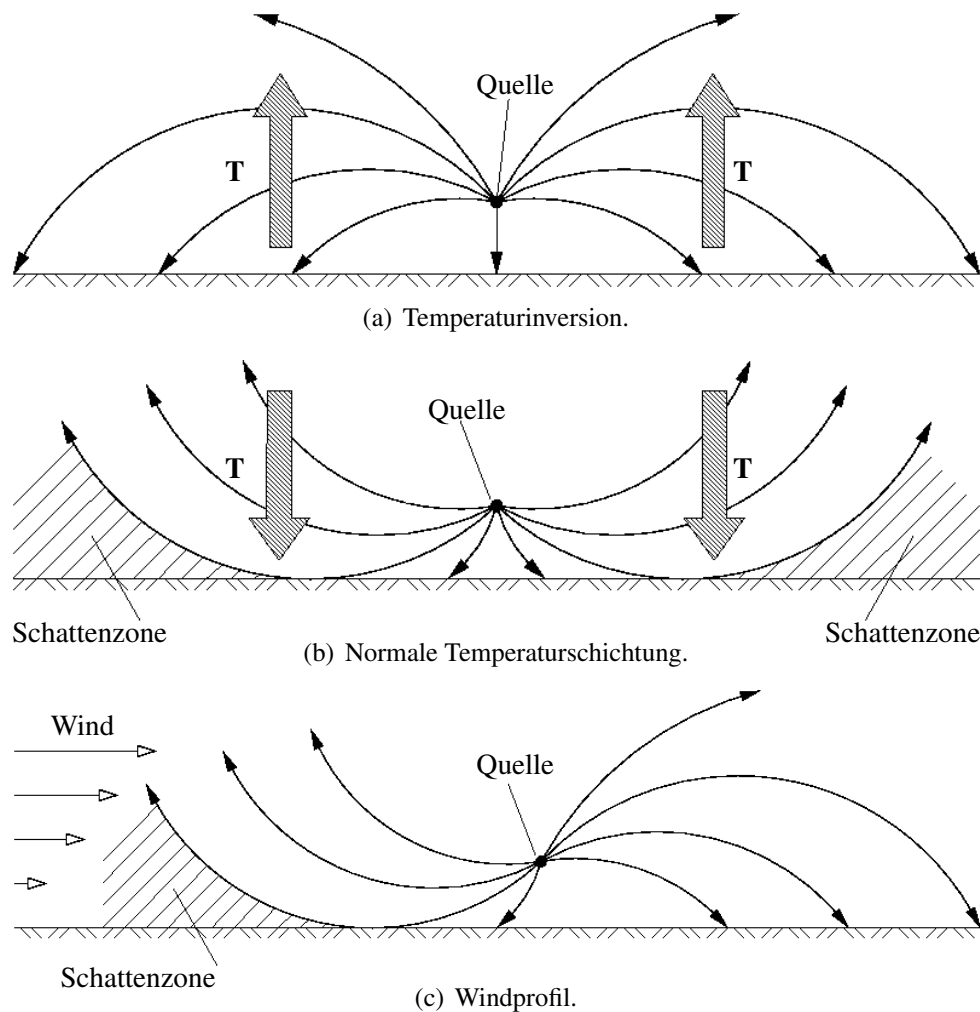


Abbildung 2.7: Refraktion für unterschiedliche meteorologische Situationen.

### 2.3.4 Fluiddämpfung

Energie kann nicht nur an der Grenzfläche zweier Medien absorbiert werden, sondern es kommt bei der Wellenausbreitung in verlustbehafteten Fluiden auch im Innern des Fluids zu Reibungsverlusten. Durch die innere Reibung der Gasteilchen wird ein Teil der Schallenergie in Wärme umgewandelt. Dieser Vorgang wird Schalldämpfung genannt und kann mathematisch beschrieben werden, indem in der Wellengleichung (2.13) ein zusätzlicher Dämpfungsterm berücksichtigt wird [38]:

$$\Delta p - \frac{R}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2.34)$$

Mit Hilfe des zeitharmonischen Ansatzes (2.17) kann Gleichung (2.34) wieder im Frequenzbe-

reich formuliert werden und man erhält

$$\Delta p + \underbrace{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega \frac{R}{\rho_0 c^2} \right)}_{:=\hat{k}^2} p = 0. \quad (2.35)$$

Die modifizierte Wellenzahl  $\hat{k}$  ist komplex. Sie kann für kleine Strömungswiderstände  $R$  durch eine Reihenentwicklung der Wurzel vereinfacht werden zu

$$\hat{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\omega \frac{R}{\rho_0 c^2}} \approx \frac{\omega}{c} \left( 1 + \frac{iR}{2\rho\omega} \right) = k + i\beta \quad (2.36)$$

wobei  $k$  die Wellenzahl bei reibungsfreier Wellenausbreitung bezeichnet und ein Absorptionskoeffizienten  $\beta := R/(2\rho c)$  definiert wird. Dieser setzt sich generell zusammen aus Anteilen für innere Reibung, Wärmeleitung und molekulare Relaxation, die in [38] näher beschrieben werden. Die Kombination aus innerer Reibung und Wärmeleitung wird auch als „klassische“ Dämpfung bezeichnet, ihr Anteil an der Gesamtdämpfung wird jedoch durch den Anteil aus molekularer Relaxation bei weitem übertroffen. In [56] sind die Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von Frequenz und relativer Luftfeuchtigkeit einem Diagramm zu entnehmen. Gleichzeitig kann jedem  $\beta$  ein Dämpfungswert der Einheit  $[dB/km]$  zugeordnet werden, d.h. auf einer logarithmischen Skala - z.B. bei Darstellung als Schalldruckpegel in  $[dB]$  - sind die Verluste proportional zum Ausbreitungsweg. Dies wird auch deutlich, indem man in die Lösung für den Schalldruck einer Kugelwelle die komplexe Wellenzahl einsetzt:

$$p = e^{i\hat{k}r} = e^{i(k+i\beta)r} = e^{ikr} e^{-\beta r}. \quad (2.37)$$

In einer logarithmischen Darstellung wird aus dem Verlustfaktor  $e^{-\beta r}$  ein Dämpfungsterm

$$\lg e^{-\beta r} = -\beta r \lg e, \quad (2.38)$$

der für einen gegebenen Absorptionskoeffizienten  $\beta$  proportional zum Ausbreitungsweg ist. Eine andere Möglichkeit zur Berücksichtigung von Reibungsverlusten ist die Einführung komplexer LAMÉ-Konstanten bzw. Elastizitätsgrößen [49]

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \lambda_0(\omega) + i\omega\lambda_1(\omega), \\ \hat{\mu} &= \mu_0(\omega) + i\omega\mu_1(\omega). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Da sich der Kompressionsmodul  $K$  eines Gases auch in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $\mu$  schreiben lässt als

$$K = \lambda + 2\mu, \quad (2.40)$$

wird demnach für verlustbehaftete Medien sowohl der Kompressionsmodul  $K$  als auch die darüber definierte Schallgeschwindigkeit  $c$  komplex:

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\hat{K}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\rho}}. \quad (2.41)$$

Die komplexe Schallgeschwindigkeit lässt sich wiederum in eine komplexe Wellenzahl

$$\hat{k} = \frac{\omega}{\hat{c}} = \frac{\omega}{c_0 \sqrt{1 + i\eta}} \quad (2.42)$$

umrechnen, wobei  $\eta$  einen Verlustfaktor bezeichnet. Für reine Kompressionswellen beträgt er

$$\eta = \omega \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho c_0^2}, \quad (2.43)$$

was schließlich zur komplexen Wellenzahl

$$\hat{k} = k - i \frac{\omega^2}{2c_0^3} \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho} = k - i \frac{\omega\eta}{2c_0} = k - i \frac{\eta}{2} \quad (2.44)$$

führt - vergleichbar mit Gl. (2.36). Die Dämpfung im Medium wird durch den Imaginärteil von  $\hat{k}$  bestimmt.

## 2.4 Spezielle Schallfeldgrößen

### 2.4.1 Schallpegel

In der Akustik wird als physikalische Größe in SI-Einheiten der Schalldruck in *Pascal*  $[Pa] = [N/m^2]$  angegeben. Auch Schallpegelmesser messen primär diese Größe. Das menschliche Gehör jedoch nimmt relative Unterschiede zwischen Schalldrücken in  $[Pa]$  nicht linear wahr. Der Eindruck für die Ohren bzw. das angeschlossene signalverarbeitende Gehirn ist vergleichbar mit einer logarithmischen Skala. Die Abstände zwischen jeweils zwei benachbarten Zehnerpotenzen des Drucks werden als etwa äquidistant empfunden.

Um den Schalldruck bzw. die Lautstärke in Relation zu diesen Empfindungen ausdrücken zu können, bedient man sich in der Akustik einer logarithmischen Skala und rechnet in sog. *Schallpegeln*. Ein Pegel transformiert die physikalische Größe in diesen Logarithmus zur Basis 10 und bezieht ihn gleichzeitig auf eine Referenzgröße. Damit hat ein Pegel formal zwar keine Einheit. Um die Pegelwerte dennoch als solche zu kennzeichnen, wird in der Akustik die Bezeichnung *Bel* bzw. *Dezibel* ( $dB$ ) verwendet. Die Definition des *Schalldruckpegels* lautet:

$$L_P = 10 \lg\left(\frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2}\right) = 20 \lg\left(\frac{p_{eff}}{p_{ref}}\right) \quad [dB]. \quad (2.45)$$

Der effektive Schalldruck  $p_{eff}$  wird aus dem Zeitsignal  $p(t)$  durch Mittelung über ein ausreichend großes Intervall  $\tau$  bestimmt zu:

$$p_{eff}^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau p^2(t) dt, \quad (2.46)$$

wobei sich daraus für harmonische Signale  $p_{eff} = |p|/\sqrt{2}$  ergibt. Als Referenzgröße  $p_{ref}$  wird die Hörschwelle des Menschen eingesetzt, d.h. das kleinste Signal, welches das menschliche Ohr wahrnehmen kann. Beim Schalldruck ist dies  $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ .

Die Einheit  $dB$  entsteht aus *Bel* durch den Faktor 10 vor dem Logarithmus und ist so gewählt, dass  $1 dB$  etwa dem kleinsten vom menschlichen Gehör wahrnehmbaren Lautstärkeunterschied entspricht. Daher ist die Angabe in dieser Einheit auch nur in ganzzahligen Werten sinnvoll. Dieser Unterschied von  $1 dB$  entspricht bei Druckwerten in  $[Pa]$  einem Faktor 1,26 zwischen zwei in ihrer Lautstärke unterscheidbaren Signalen.

### 2.4.2 Relativer Schalldruckpegel

In der Literatur findet man bei der Schallausbreitung speziell im Freien sogenannte *relative Schalldruckpegel*. Da jeder Pegel wie bereits erläutert schon eine bezogene Größe darstellt, ist dieser Begriff eigentlich eine Tautologie. In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit wird der Begriff des öfteren auftauchen. Daher soll hier kurz auf seine Bedeutung eingegangen werden. Die Wahl eines bestimmten Referenzmaßes, auf das der berechnete Schalldruck bezogen wird, bestimmt bereits die Interpretation des Ergebnisses. Wie sich mit den Rechenvorschriften des Logarithmus' leicht nachvollziehen lässt, hat eine Änderung der Referenzgröße lediglich die



Verschiebung der Ordinate um einen konstanten Betrag  $\Delta L$  zur Folge, qualitativ ändert sich das Ergebnis nicht.

Die häufigste Art der Referenzschalldrucks ist die bereits erwähnte Hörschwelle, d.h.  $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ . Jedoch kann es sinnvoll sein, als Referenzgröße  $p_{ref}$  keinen Absolutwert zu verwenden, sondern einen Wert, in den die Quellintensität der anregenden Schallquelle genauso einfließt wie in den Schalldruck  $p$  und sich somit im Quotient aufhebt - vor allem für solche Fälle, in denen die Intensität der realen Schallquelle variiert bzw. quantitativ nicht einfach zu bestimmen ist.

Eine oft verwendete Variante bei punktförmigen Schallquellen ist die Referenz auf den Druck in  $1 \text{ m}$  Entfernung von der Quelle. Bei Ergebnissen von numerischen Berechnungen bezieht sich dies in der Regel auf den Druck im Freifeld, da in einer realen Umgebung die Angabe  $1 \text{ m}$  Abstand von der Quelle richtungsabhängig und damit nicht eindeutig ist.

Für die Bewertung von Schallschutzmaßnahmen ist ein Bezug auf die Situation *ohne* diese Maßnahmen sinnvoll. Damit kann - beispielsweise bei einer Studie über eine eventuell zu errichtende Schallschutzwand - aus den Ergebnissen direkt die Schallschutzwirkung des Bauteils abgelesen und losgelöst von anderen Einflüssen beurteilt werden.

### 2.4.3 Ansatz der effektiven Schallgeschwindigkeit

Zur Berücksichtigung eines Windfelds bei der Schallausbreitung gibt es mehrere Möglichkeiten. In Abschnitt 3.2 wird gezeigt, wie ein Strömungsfeld  $\mathbf{V}_0$  direkt in der Bewegungsgleichung mit berücksichtigt wird. Als Alternative dazu kann man auch den vereinfachenden Ansatz der effektiven Schallgeschwindigkeit verwenden. Auch das hier vorgestellte Raytracingverfahren arbeitet mit diesem Ansatz. Er geht von der Überlegung aus, dass sich der Schall in Strömungsrichtung schneller ausbreitet als gegen die Strömungsrichtung. Das Windgeschwindigkeitsfeld  $\mathbf{V}_0$  wird demnach mit der Schallgeschwindigkeit bei adiabatischen Bedingungen  $c$  einfach überlagert. Das Windfeld, das ursprünglich ein Vektorfeld ist, reduziert sich somit auf die horizontale Komponente in Ausbreitungsrichtung. Die effektive Schallgeschwindigkeit ergibt sich dann zu

$$c_{eff}(z) = c(z) + V(z) \quad (2.47)$$

und ist eine Funktion der Höhe  $z$ . Ein Vorteil des Ansatzes der effektiven Schallgeschwindigkeit ist die Berücksichtigung von Wind- und Temperaturprofilen in nur einer Variablen  $c_{eff}$ . Die Temperatur  $T_0$  geht dabei mit Hilfe der Formel

$$c(z) = \sqrt{\kappa R T_0(z)} \quad (2.48)$$

direkt in den ersten Term der Gl. (2.47) ein, der Isotropenkoeffizient  $\kappa$  und die Gaskonstante  $R$  sind dabei von der Höhe  $z$  unabhängig. Die horizontale Komponente des Windfeldes  $\mathbf{V}_0$  ergibt den zweiten Term  $V_0(z)$ .

Dieser Ansatz ist gerechtfertigt und sinnvoll, solange die Ausbreitungsrichtung annähernd horizontal verläuft. Flache Steigungswinkel der Schallstrahlen sind immer dann gegeben, wenn sich Quelle und Empfänger in Bodennähe befinden. In [12] wird dieser Ansatz an einem Beispiel verifiziert.



# Kapitel 3

## Randelementmethoden (BEM)

Im folgenden Kapitel werden die Grundlagen der Randelementmethode und einige weitergehende Formulierungen dargelegt. In der nationalen wie internationalen Literatur ist die Randelementmethode unter der Abkürzung BEM (von engl. **B**oundary **E**lement **M**ethod) bekannt. Im Folgenden wird daher alternativ auch diese Kurzform verwendet. Die BEM basiert auf der Randintegralformulierung der jeweiligen physikalischen Problemstellung. Daher wird zunächst auf die Herleitung der Randintegraldarstellung für die Wellenausbreitung in einem idealen kompressiblen Fluid eingegangen, um anschließend einige besondere Aspekte bei der Lösung und Anwendung der Methode in der Akustik zu behandeln und näher zu betrachten, sofern sie im Rahmen dieser Arbeit eine Rolle spielen. Dabei handelt es sich um Methoden bzw. modifizierte Formulierungen, mit denen die Restriktion der Randelementmethode auf ein ruhendes homogenes Medium überwunden werden kann.

Für alle hier nicht näher beschriebenen Teilgebiete der BEM sei auf die große Zahl an hilfreichen Lehrbüchern und wissenschaftlichen Veröffentlichungen im Literaturverzeichnis verwiesen. Insbesondere auf die Betrachtung von Randelementmethoden im Zeitbereich wird hier verzichtet, da in der Akustik meist harmonische Vorgänge von Interesse sind und dafür eine Formulierung im Frequenzbereich weitaus besser geeignet ist.

### 3.1 Randintegralgleichung

In diesem Abschnitt wird die Herleitung der direkten Randintegralgleichung gezeigt. Für die indirekte Form wird z.B. auf [3] verwiesen. Die Randintegralgleichung für die Akustik im Frequenzbereich ist eine integrale Beschreibung der in Abschnitt 2.1.3 hergeleiteten HELMHOLTZ-Gleichung (2.18). Von zentraler Bedeutung für die Formulierung als Randintegral ist die Existenz einer sogenannten *Fundamentallösung*. Sie beschreibt die Druckverteilung im Freifeld infolge einer punktförmigen Quelle, was für die Akustik einem Kugelstrahler nullter Ordnung entspricht. Bei einer Betrachtung im Frequenzbereich erfolgt die Anregung harmonisch mit der Frequenz  $f$  bzw. der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$ . Eine Fundamentallösung  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  ist so definiert, dass sie die inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (3.1)$$

erfüllt. Das Argument der DIRAC-Distribution  $\delta$  auf der rechten Seite der Gleichung stellt den Abstand eines Feldpunktes  $\mathbf{x}$  von der Punktquelle in  $\boldsymbol{\xi}$  dar. Im zweidimensionalen Raum lautet die Fundamentallösung

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr). \quad (3.2)$$

mit der imaginären Einheit  $i$ , der Wellenzahl  $k = \omega/c$  und dem Abstand  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  zwischen Quellpunkt  $\boldsymbol{\xi}$  und Feldpunkt  $\mathbf{x}$ . Dabei ist  $H_0^{(1)}$  die HANKEL-Funktion nullter Ordnung und erster Art. Die HANKEL-Funktion setzt sich aus den BESSEL-Funktionen erster und zweiter Art zusammen:

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr). \quad (3.3)$$

Für den 3D-Fall gilt

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}. \quad (3.4)$$

Zur Ermittlung der Randintegralgleichung wird die inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung mit dem allgemeinen Quellterm  $a$  als rechte Seite zunächst über das Gebiet  $\Omega$  integriert und mit der Fundamentallösung  $G$  gewichtet:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p + k^2 p) G d\Omega = \int_{\Omega} a G d\Omega. \quad (3.5)$$

Der LAPLACE-Term ( $\nabla^2 = \Delta$ ) auf der linken Seite wird durch zweimaliges Anwenden des GREENSchen Satzes umgeformt zu

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p G d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} G d\Gamma - \int_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} p \nabla^2 G d\Omega. \quad (3.6)$$

Aus Gleichung (3.5) wird mit dieser Umformung

$$\int_{\Omega} p \underbrace{(\nabla^2 G + k^2 G)}_{:= -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} G d\Gamma - \int_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} a G d\Omega. \quad (3.7)$$

Mit Hilfe der Filtereigenschaft der DIRAC-Distribution,

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \tau) dx = f(\tau) \quad \tau \in \Omega, \quad (3.8)$$

verschwindet schließlich das Gebietsintegral auf der linken Seite von Gleichung (3.7) und wird ersetzt durch den skalaren Druckwert  $p$  an der Stelle  $\boldsymbol{\xi}$ . Damit erhält man:

$$p(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} G d\Gamma - \int_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} a G d\Omega, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega. \quad (3.9)$$

Außer beim Quellterm, dessen Auswertung in Abschnitt 3.1.2 betrachtet werden soll, tauchen hier nur noch Integrale über den Rand  $\Gamma$  auf. Gleichung (3.9) gilt für alle *Innenpunkte*, d.h. für alle Punkte  $\boldsymbol{\xi}$  im Gebiet  $\Omega$ . Zur Berechnung der Druckverteilung im Gebietsinneren muss jedoch zunächst Druck und Fluss auf dem Gebietsrand bekannt sein.

Lässt man den Quellpunkt  $\xi$  auf den Rand wandern, so hat der Integrand für diesen Punkt eine Polstelle, da dort  $r = |\mathbf{x} - \xi| = 0$  und die Fundamentallösung  $G$  daher singulär wird. Aus einer Grenzwertbetrachtung der  $\varepsilon$ -Umgebung dieses singulären Punktes erhält man für den Fall des Quellpunktes  $\xi$  auf dem Rand einen Vorfaktor  $c$  vor dem integralfreien Term in Gl. (3.9), der sich berechnet zu

$$c(\xi) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} d\Gamma_\varepsilon, \quad \xi \in \Gamma. \quad (3.10)$$

Dieser Vorfaktor hängt von der Geometrie des Randes an der singulären Stelle ab. Für den Fall eines glatten Randes ergibt sich  $c = 0,5$  bzw. auf einer rechtwinklig konkaven Kante (z.B. eines quaderförmiges Gebiets)  $c = 0,25$  und an der rechtwinklig konkaven Ecke eines 3D-Gebiets  $c = 0,125$ .

Man erhält mit diesem Vorfaktor aus Gleichung (3.9) die *Randintegralgleichung*

$$c(\xi)p(\xi) + \int_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} G d\Gamma - \int_{\Omega} a G d\Omega. \quad (3.11)$$

Die benötigte Normalenableitung der Fundamentallösung lautet für den 2D-Fall

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} = \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.12)$$

bzw. für dreidimensionale Probleme

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi r^2} e^{ikr} (1 - ikr) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.13)$$

Für die numerische Lösung der Randintegralgleichung (3.11) muss im nächsten Schritt der Rand  $\Gamma$  diskretisiert, d.h. in Knoten und Elemente unterteilt werden. In jedem Randelement werden Ansatzfunktionen  $N_k^e(\mathbf{x})$  definiert, die in Verbindung mit den  $M$  Knotenwerten  $p_k^e$  bzw.  $q_k^e = (\frac{\partial p}{\partial n})_k^e$  den Verlauf des Drucks  $p^e$  bzw. des Flusses  $q^e$  auf dem Element  $e$  approximieren:

$$\begin{aligned} p^e(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^M p_k N_k^e(\mathbf{x}) \\ q^e(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^M q_k N_k^e(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die diskretisierte Form der Randintegralgleichung wird für alle  $N_\Gamma$  Randknoten aufgestellt, indem der Quellpunkt  $\xi$  nacheinander auf jeden der diskretisierten Knoten gesetzt wird (Punktkollokation). Aus den  $N_\Gamma$  diskreten Gleichungen mit zunächst  $2 \cdot N_\Gamma$  Unbekannten entsteht ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}, \quad (3.15)$$

welches als *Randelementgleichung* bezeichnet wird. Ist auf dem Rand  $\Gamma$  in jedem Knoten entweder  $p$  oder  $q$  als Randbedingung bekannt, so können nach Umsortieren des Gleichungssystems (3.15) nach bekannten und unbekannten Größen sortiert und die jeweils fehlenden Werte berechnet werden. Wenn alle Größen auf dem Rand bekannt sind, kann in einer Nachlaufrechnung

mit Hilfe von Gleichung (3.9) eine Innenpunktauswertung durchgeführt werden, d.h. dann kann der Druck  $p(\xi)$  in jedem Punkt innerhalb des Gebiets berechnet werden. Ist der Schalldruck nicht nur an diskreten Punkten gesucht, sondern der Druckverlauf in größeren Bereichen im Gebiet, so kann ein Netz von Innenpunkten generiert werden. Mit der Zuordnung dieser Innenpunkte zu Elementen analog denen auf dem Gebietsrand dient ein solches Innenpunktnetz insbesondere zur Visualisierung der Ergebnisse.

Bei Außenraumproblemen muss als zusätzliche Randbedingung im Unendlichen die SOMMERFELDSche Abstrahlbedingung erfüllt sein (siehe Abschnitt 2.2). Dies ist für die hergeleitete Randelementformulierung implizit gewährleistet und stellt einen großen Vorteil der BEM bei Außenraumproblemen dar. Bei der Schallausbreitung im Freien hat man in der Regel mit Außenraumproblemen zu tun, insbesondere mit dem in Abschnitt 3.1.1 betrachteten *Halbraum*.

Beim NEUMANNschen Außenraumproblem ist zu beachten, dass bei bestimmten Frequenzen, die den Eigenfrequenzen des zugehörigen DIRICHLETSchen Innenraumproblems entsprechen, die Integraldarstellung nicht eindeutig ist. Diese Nichteindeutigkeit ist unphysikalischen Ursprungs und kommt daher, dass die Integraldarstellung des NEUMANNschen Außenraumproblems mathematisch mit der des DIRICHLETSchen Innenraumproblems identisch ist. Ausführlich behandelt wird diese Eindeutigkeitsproblematik sowie mögliche Maßnahmen zur Sicherstellung einer eindeutigen Lösung z.B. in [53].

### 3.1.1 Halbraum

Werden die o.g. Fundamentallösungen verwendet, dann müssen für eine Berechnung mit der Randelementmethode alle Teile des Randes diskretisiert werden, d.h. in Elemente zerlegt werden. Für einige Probleme können jedoch spezielle Fundamentallösungen verwendet werden, die bereits weitere Information über das Material oder die Geometrie des Gebiets enthalten. So kann insbesondere für Berechnungen der Schallausbreitung im Freien eine *Halbraum-Fundamentallösung* verwendet werden, die implizit eine unendliche Ebene als Reflektionsfläche berücksichtigt (siehe Abb. 3.1). Die Fundamentallösung für den Halbraum ist eine Erweiterung

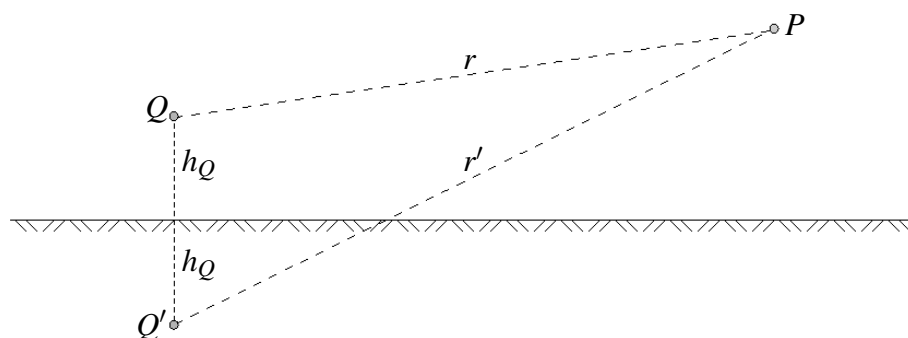


Abbildung 3.1: Geometrie und Bezeichnungen für den Halbraum.

der Freifeld-Fundamentallösung um einen zweiten Term, der die Wirkung einer Spiegelquelle

$S'$  repräsentiert:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) - R \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr'). \quad (3.16)$$

im Fall von 2D-Problemen bzw. für den dreidimensionalen Halbraum entsprechend

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} + R \frac{1}{4\pi r'} e^{ikr'}. \quad (3.17)$$

In der Fundamentallösung muss bereits die Randbedingung auf der Ebene als Information enthalten sein. Der zusätzliche Term in Gl. (3.16) bzw. (3.17) enthält einen Reflexionsfaktor  $R$ , welcher die Randbedingung der Ebene beschreibt. Für den Fall einer ideal schallharten Ebene ist  $R = 1$ , eine ideal schallweiche Ebene ergibt einen Reflexionsfaktor  $R = -1$ . Der allgemeine Fall einer absorbierenden Fläche mit endlicher Impedanz führt auf einen komplexen Reflexionsfaktor, dessen Betrag zwischen  $-1$  und  $1$  liegt. Für eine genauere Betrachtung des Reflexionskoeffizienten sei auf Abschnitt 2.3.1 verwiesen.

In Abbildung 3.2 ist für die 2D-Halbraum-Fundamentallösung mit schallharter Reflexionsebene der Verlauf des Realteils  $\Re\{G\}$  bzw. der Amplitude  $|G|$  dargestellt über einem quadratischen  $x$ - $h$ -Gebiet. Dies kann für die Anwendung bei der Schallausbreitung im Freien als Ausschnitt der Länge  $\Delta x = 4\text{ m}$  und Höhe  $h = 4\text{ m}$  über dem Boden (unendlich ausgedehnte Ebene bei  $h = 0$ ) interpretiert werden. Die Polstelle befindet sich hierbei in  $x = 0$  und  $h_Q = 1\text{ m}$ . Die Wellenzahl beträgt  $k = 10$ . Durch die Reflexion bei  $h = 0$  entstehen Interferenzen und stehende Wellen zwischen Anregungspunkt und der Reflexionsebene.

Als Vergleich sind in Abbildung 3.3 für denselben quadratischen Ausschnitt die Verläufe der Freifeld-Fundamentallösung gezeigt.

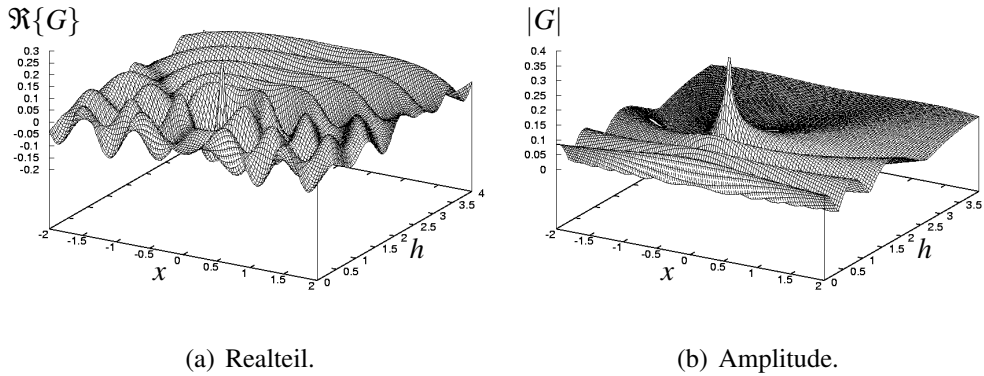


Abbildung 3.2: Realteil bzw. Amplitude der 2D-Halbraum-Fundamentallösung.

### 3.1.2 Punktquellen

Die schallerzeugende Anregung des Systems kann auf verschiedene Weise erfolgen. Sie kann z.B. in Form von Randbedingungen aufgebracht werden. Dabei wird entweder der Randwert

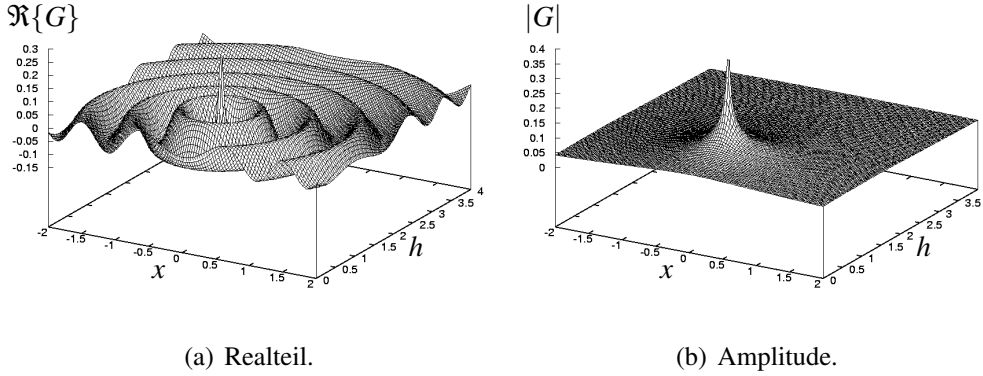


Abbildung 3.3: Realteil bzw. Amplitude der 2D-Freifeld-Fundamentallösung.

der Primärvariablen (Druck bzw. Potenzial) als Zwangsbedingung vorgegeben oder das System mit einer Fluss-Randbedingung angeregt. Letzteres entspricht physikalisch einem vibrierenden Gebietsrand. Dabei wird die Amplitude der Schnelle sowie eine Phase vorgegeben, mit der die Struktur harmonisch schwingt.

Alternativ können auch im Gebiet Schallquellen aufgebracht werden. In diesem Fall ist das Gebietsintegral auf der rechten Seite von Gleichung (3.11) auszuwerten. Diese Auswertung ist für den allgemeinen Fall einer Quellfunktion  $a(\mathbf{x})$ , welche im gesamten Gebiet definiert sein soll, verbunden mit der Diskretisierung des gesamten Gebiets. Dies würde einen entscheidenden Vorteil der Randelementmethode zunichte und eine Lösung des Problems gerade für Außenraumprobleme mit einem Gebiet unendlicher Ausdehnung unmöglich machen. Für eine Punktquelle im Punkt  $\xi_a$  mit  $a(\xi) = a_0 \delta(\xi - \xi_a)$  jedoch ist dieses Gebietsintegral einfach auswertbar und man erhält:

$$\int_{\Omega} a(\xi) G(\mathbf{x}, \xi) d\Omega_x = \int_{\Omega} a_0 \delta(\xi - \xi_a) G(\mathbf{x}, \xi) d\Omega_x = a_0 G(\xi, \xi_a). \quad (3.18)$$

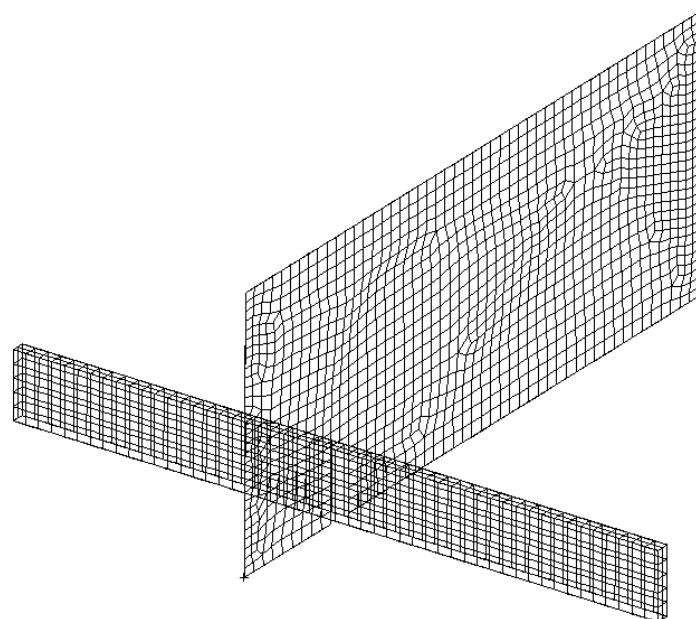
Bei der Schallausbreitung im Freien können viele Schallquellen mit sehr guter Näherung als Punktquellen modelliert werden. Wenn die Form der schallerzeugenden Objekte für die Schallausbreitung vernachlässigbar ist, kann man sich durch den Einsatz von Punktquellen für die Berechnung die Diskretisierung dieser Objekte und die Vorgabe von Randbedingungen sparen. Eine solche Punktquelle wird auch akustischer Monopol oder Kugelstrahler nullter Ordnung genannt und entspricht einer pulsierenden Kugel mit infinitesimalem Radius.

### 3.1.3 Beispiel

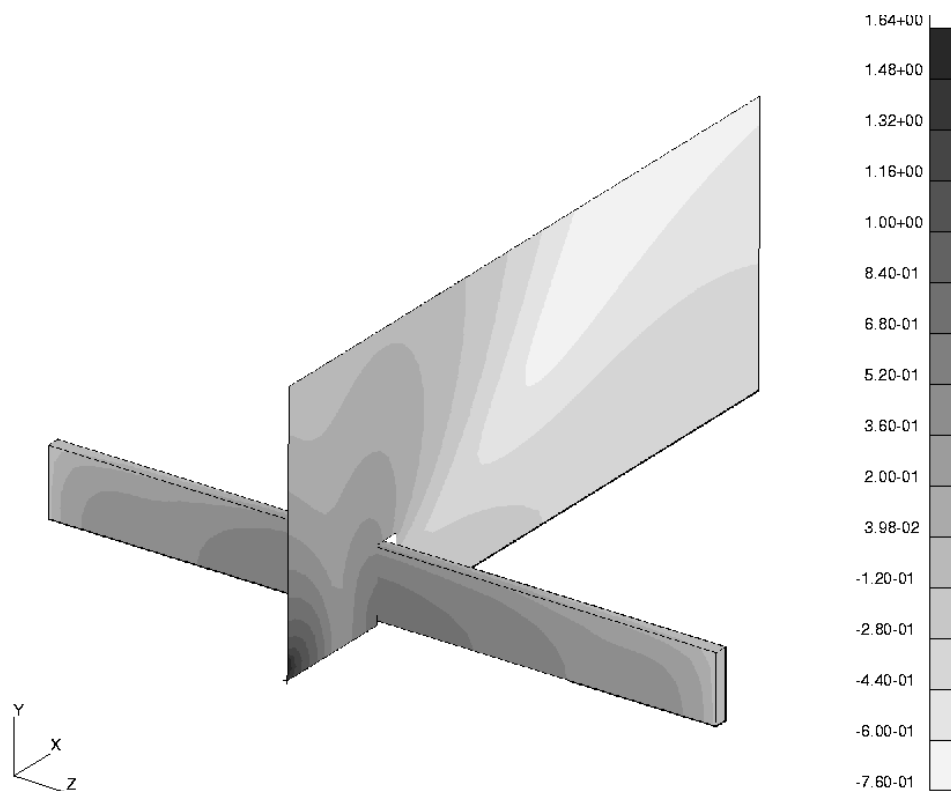
Als Beispiel sei eine Situation im Freien betrachtet, in der die Schallausbreitung von einer Punktquelle im dreidimensionalen Raum über schallhartem Boden durch eine Schallschutzmauer beeinflusst wird (siehe Abb. 3.4). Die Mauer hat eine Länge von  $l_s = 50m$ , eine Höhe



von  $h_S = 3\text{ m}$  und eine Dicke von  $d_S = 0,2\text{ m}$ . Die Punktquelle regt das System mit der Einheitsintensität und einer Frequenz von  $f = 20\text{ Hz}$  an. Sie befindet sich in  $h_Q = 1\text{ m}$  Höhe und mittig etwa  $4\text{ m}$  vor der Mauer. Die Ergebnisse in Abbildung 3.4(b) zeigen die Schalldruckamplitude in einer logarithmischen Skala in Anlehnung an eine  $\text{dB}$ -Skala, um die exponentielle Abnahme der Amplituden vor allem hinter der Mauer darstellen zu können. Die Berechnung des Drucks erfolgt einerseits auf dem Rand des Gebiets - bestehend aus der Mauer - und auf einem diskretisierten Netz von Innenpunkten, welches orthogonal zur Längsrichtung der Schallschutzmauer durch die Punktquelle verläuft.



(a) Diskretisierung.



(b) Druck- bzw. Potenzialverteilung.

Abbildung 3.4: Diskretisierung und Ergebnis der Berechnung für eine Schallschutzwand ( $l \times h \times d = 50\text{ m} \times 3\text{ m} \times 0,2\text{ m}$ ) über schallhartem Boden in 3D, mit Innenpunktnetz; Anregung durch eine Punktquelle mit  $f = 20\text{ Hz}$ .

## 3.2 Strömendes Medium

Die Voraussetzung zur Anwendung der Randelementmethode ist die Existenz einer Fundamentallösung. Da das Gebiet nicht diskretisiert wird - d.h. nicht in Elemente unterteilt wird, denen unterschiedliche Materialeigenschaften zugewiesen werden könnten -, muss die Fundamentallösung ein Verhalten beschreiben, das im gesamten Gebiet Gültigkeit hat. Daher ist jede Art von Inhomogenität im Gebiet schwer zu modellieren.

Betrachtet wird im folgenden eine stationäre gleichförmige Strömung im Gebiet. Für diesen Fall wird zunächst die Differenzialgleichung hergeleitet. Ausgehend von der Kontinuitätsgleichung in nicht linearisierter Form setzt man statt der Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  - auch als Schallschnelle bezeichnet - eine Summe aus dieser akustischen Teilchengeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{V}_0$  ein und erhält (z.B. [54]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \rho)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{v})\} = 0. \quad (3.19)$$

Ebenso wird diese zusammengesetzte, durch Akustik und Strömung verursachte Geschwindigkeit in die Impulsgleichung eingesetzt:

$$(\rho_0 + \rho) \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}) \cdot \nabla (\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}) \right\} = -\nabla p. \quad (3.20)$$

Zusammen mit der linearisierten Zustandsgleichung 2.6 für ideale Gase kann man analog zum Fall des ruhenden Mediums in Abschnitt 2.1.2 eine Wellengleichung für ein Medium mit konstanter Strömung aufstellen:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{M} \cdot \nabla p) - (\mathbf{M} \cdot \nabla)(\mathbf{M} \cdot \nabla p) = 0, \quad (3.21)$$

wobei die Strömung hier bereits im MACH-Vektor  $\mathbf{M} = \mathbf{V}_0/c$  ausgedrückt ist.

Diese Wellengleichung kann ebenso für das Geschwindigkeitspotenzial  $\phi$  (Potenzial der Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$ ) formuliert werden:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{M} \cdot \nabla \phi) - (\mathbf{M} \cdot \nabla)(\mathbf{M} \cdot \nabla \phi) = 0. \quad (3.22)$$

Die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeitspotenzial stellt für den Fall eines strömenden Mediums eine Erweiterung der Gleichung (2.16) dar und hängt von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit ab [54]:

$$p = \rho_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \phi \right). \quad (3.23)$$

Wird in der Wellengleichung (3.22) der zeitharmonische Ansatz

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \hat{\Phi}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

eingesetzt, so ergibt sich eine modifizierte HELMHOLTZ-Gleichung, in der die letzten beiden Summanden auf der linken Seite den Einfluss der Strömung darstellen:

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + k^2 \hat{\Phi} - 2ik(\mathbf{M} \cdot \nabla \hat{\Phi}) - (\mathbf{M} \cdot \nabla)(\mathbf{M} \cdot \nabla \hat{\Phi}) = 0. \quad (3.25)$$

Aus Gleichung (3.23) wird entsprechend die Beziehung

$$p = \rho_0 (i\omega \hat{\Phi} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \hat{\Phi}). \quad (3.26)$$

Auf die Kennzeichnung von komplexen Frequenzbereichsgrößen mit „ $\hat{\phantom{x}}$ “ wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Gibt man die gleichförmige Strömung in Richtung der positiven  $x$ -Koordinate vor bzw. wählt das Koordinatensystem so, dass dies der Fall ist, dann lässt sich der MACH-Vektor  $\mathbf{M}$  zu einer MACH-Zahl  $M$  reduzieren und aus Gleichung 3.25 wird:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi - 2ikM \frac{\partial \Phi}{\partial x} - M^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (3.27)$$

Diese modifizierte HELMHOLTZ-Gleichung besitzt einen zusätzlichen konvektiven Term und eine Erweiterung des LAPLACE-Operators. Für ihre Lösung werden in den folgenden Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 zwei alternative Möglichkeiten gezeigt.

### 3.2.1 Transformationsformulierung

Die Fundamentallösungen (3.2) bzw. (3.4) für die Standard-HELMHOLTZ-Gleichung erfüllen nicht die modifizierte Differenzialgleichung (3.27). Um dennoch die bekannte und in allen herkömmlichen Randlelement-Programmen implementierten Fundamentallösungen benutzen zu können, ist es möglich, durch eine Transformation von Koordinaten und Variablen die Gleichung (3.27) in die HELMHOLTZ-Gleichung zurückzuführen [54]. Für den angenommenen Spezialfall der Strömung in positive  $x$ -Richtung ist die folgende Transformation nötig:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{\sqrt{1-M^2}}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \quad (\text{in 3D}), \\ \tilde{\Phi} &= \Phi e^{-ikM\tilde{x}}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{\sqrt{1-M^2}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Abbildungsvorschriften für die Koordinaten sind in der Strömungsmechanik auch unter dem Namen PRANDTL-GLAUERT-Transformation bekannt. Substituiert man alle transformierten Größen in Gleichung (3.27), dann ergibt sich im transformierten System:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\Phi} + \tilde{k}^2 \tilde{\Phi} = 0. \quad (3.29)$$

Wird die Anregung nicht nur durch die Randbedingungen, sondern auch durch Quellen im Gebiet vorgenommen, so müssen auch die Quellintensitäten entsprechend transformiert bzw. skaliert werden:

$$\tilde{a} = a e^{-ikM\tilde{x}}. \quad (3.30)$$

Zur numerischen Berechnung von Gl. (3.38) wird die bekannte Randintegralgleichung gelöst, jedoch mit transformierten Variablen:

$$\tilde{c}\tilde{\Phi} = \int_{\tilde{\Gamma}} \left( \tilde{G} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{n}} \tilde{\Phi} \right) d\tilde{\Gamma} \quad (3.31)$$

Darin wird mit der bekannten und in allen gängigen Randelementprogrammen für Akustik implementierten 2D- bzw. 3D-Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\tilde{k}\tilde{r}) \\ \text{bzw. } \tilde{G} &= \frac{1}{4\pi\tilde{r}} e^{i\tilde{k}\tilde{r}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die Diskretisierung kann an der Original-Geometrie vorgenommen werden, bevor die o.g. Transformation der Koordinaten durchgeführt wird. Die Transformation ändert auch nichts an der Element-Topologie. Das Gebiet wird lediglich in Strömungsrichtung  $x$  verzerrt. Die Integration über den diskretisierten Rand  $\Gamma$  des Gebiets  $\Omega$  führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\Phi} = \tilde{\mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \quad (3.33)$$

Um die Lösung des Gleichungssystems im originalen, nicht-transformierten System zu erhalten, kann vor dem Lösen eine Rücktransformation erfolgen, sodass im Lösungsvektor  $\Phi$  und  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  statt  $\tilde{\Phi}$  und  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}}$  stehen. Der Normalenfluss  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}}$  im transformierten System kann mit Hilfe von Gleichung (3.28) ausgedrückt werden als

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \tilde{n}} - i\tilde{k}M\Phi \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{n}} \right) e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} \quad (3.34)$$

und zusammen mit der Transformationsregel für das Potenzial  $\tilde{\Phi}$  in Gl. (3.33) substituiert werden:

$$[\tilde{H}_{ij}] \{ \Phi e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} \} = [\tilde{G}_{ij}] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \tilde{n}} e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} - i\tilde{k}M \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{n}} \cdot \Phi e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} \right\} \quad (3.35)$$

Die partiellen Ableitungen nach  $\tilde{n}$  lassen sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \tilde{n}} &= \sqrt{(1-M^2)\tilde{n}_x^2 + \tilde{n}_y^2 + \tilde{n}_z^2} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{n}} &= \tilde{n}_x. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Daraus erhält man durch Umsortieren nach Termen von  $\Phi$  und  $\partial \Phi / \partial n$  die Rücktransmutationsregeln

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \tilde{H}_{ij} e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} + \tilde{G}_{ij} e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} i\tilde{k}M\tilde{n}_x \\ G_{ij} &= \tilde{G}_{ij} e^{-i\tilde{k}M\tilde{x}} \sqrt{(1-M^2)\tilde{n}_x^2 + \tilde{n}_y^2 + \tilde{n}_z^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit denen ein Gleichungssystem  $\mathbf{H} \cdot \Phi = \mathbf{G} \cdot \partial \Phi / \partial n$  aufgestellt werden kann, welches das Problem in seinen Original-Koordinaten und Original-Variablen beschreibt. Die Randbedingungen können somit in ihrer ursprünglichen Form eingesetzt werden und müssen nicht transformiert werden.

### 3.2.2 Modifizierte Fundamentallösung

Eine alternative Möglichkeit zur Lösung der modifizierten HELMHOLTZ-Gleichung (3.27) bietet die Herleitung einer modifizierten Fundamentallösung als Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 G + k^2 G + 2ikM \frac{\partial G}{\partial x} - M^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - x_S). \quad (3.38)$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den adjungierten Operator der zu lösenden Differenzialgleichung (3.27) dar. Der adjungierte Operator ergibt sich bei der Herleitung der Randintegralgleichung durch die Umformung von Gleichung (3.5) nach (3.7), wobei für die dort eingesetzte Standard-HELMHOLTZ-Gleichung der adjungierte Operator dem ursprünglichen Differentialoperator entspricht.

Die Herleitung der Fundamentallösung für den 2D-Fall ist in [22] erläutert und führt auf

$$G = -\frac{i}{4\sqrt{1-M^2}} H_0^{(2)} \left( \frac{k}{(1-M^2)} \sqrt{(x-x_S)^2 + (1-M^2)(y-y_S)^2} \right) \cdot e^{-\frac{ikM}{1-M^2}(x-x_S)}. \quad (3.39)$$

Die 3D-Fundamentallösung wird in [61] hergeleitet und lautet

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik \frac{\sqrt{(x-x_S)^2 + (1-M^2)((y-y_S)^2 + (z-z_S)^2) + M(x-x_S)}}{1-M^2}}}{\sqrt{(x-x_S)^2 + (1-M^2)((y-y_S)^2 + (z-z_S)^2)}}. \quad (3.40)$$

Zur Herleitung einer Randintegralgleichung für (3.27) wichtet man diese zunächst mit der Fundamentallösung  $G$  und integriert über das Gebiet  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi - 2ikM \frac{\partial \Phi}{\partial x} - M^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) G d\Omega = 0. \quad (3.41)$$

Anschließend werden alle Terme mit zweiten Ableitungen von  $\Phi$  zweimal und der konvektive Term einmal partiell integriert. Dies führt auf die modifizierte Randintegralgleichung

$$c(\xi)\Phi(\xi) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} G - \Phi \frac{\partial G}{\partial n} - 2ikM G n_x - M^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} G - \Phi \frac{\partial G}{\partial x} \right) n_x \right] d\Gamma. \quad (3.42)$$

Die Schwierigkeit beim Lösen dieser Randintegralgleichung in diskretisierter Form besteht darin, dass außer den Knotenwerten für Feldgröße  $\Phi$  und Fluss  $\partial\Phi/\partial n$  auch die Ableitung in Strömungsrichtung enthalten ist. Um eine Randelementgleichung aufstellen zu können, muss diese Ableitung noch in Normalenrichtung  $n$  und Tangentenrichtung  $t$  zerlegt werden. Für den 2D-Fall (d.h. eindimensionaler Rand) lautet diese Zerlegung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t_x, \quad (3.43)$$

wobei  $n_x$  bzw.  $t_x$  die Anteile der beiden Vektoren in  $x$ -Richtung sind. Die Funktion  $\partial\Phi/\partial t$  kann wiederum ausgedrückt werden als Knotenwerte  $\Phi$  und Tangentialableitung der Ansatzfunktionen  $N_k$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_{k=1}^M \Phi_k \frac{\partial N_k}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Als Beispiel ist in den Abbildungen 3.5 und 3.6 ein Ausschnitt aus einem Halbraum mit einer konstanten Strömung von  $M = 0,3$  gezeigt, in die eine Punktquelle mit Anregungsfrequenz  $f = 100\text{ Hz}$  gesetzt wird. Der Ausschnitt misst  $l \times h = 20\text{ m} \times 5\text{ m}$ , die Quelle befindet sich in  $h_Q = 1,5\text{ m}$  über dem schallharten Boden. Das Zeitsignal  $p(\mathbf{x}, t)$  wird aus dem komplexen Schalldruck  $\hat{p}(\mathbf{x})$ , der sich aus der BEM-Rechnung im Frequenzbereich ergibt, zurück berechnet zu:

$$p(\mathbf{x}, t) = \Re\{\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}. \quad (3.45)$$

Das Zeitsignal in Abb. 3.5 zeigt, dass sich die Wellen in Strömungsrichtung schneller fortbewegen. Der Abstand zwischen zwei Wellenbergen bzw. -tälern ist stromab der Quelle größer, da dort die effektive Schallgeschwindigkeit (siehe Abschnitt 2.4) höher ist.

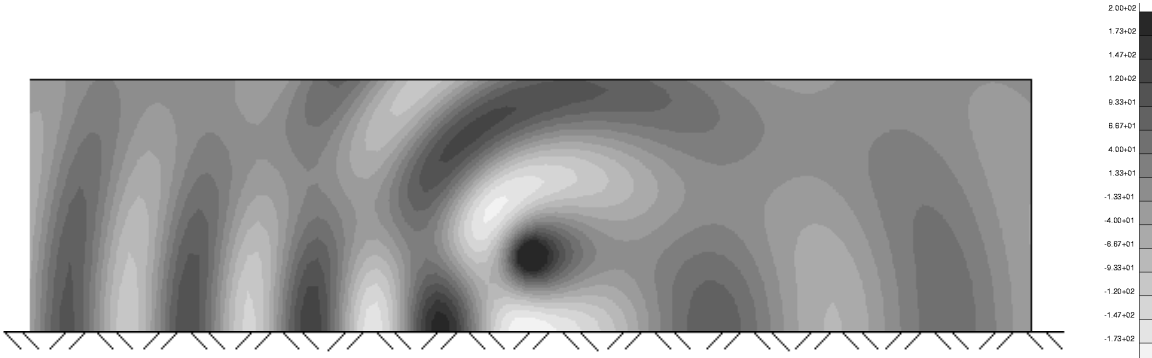


Abbildung 3.5: Schalldruck  $p(\mathbf{x}, t)$  (Zeitbereich) für eine Punktquelle ( $h_Q = 1,5\text{ m}$ ,  $f = 100\text{ Hz}$ ) in einer Strömung ( $M = 0,3$ ) über schallhartem Boden zu einem Zeitpunkt  $t_0$ .

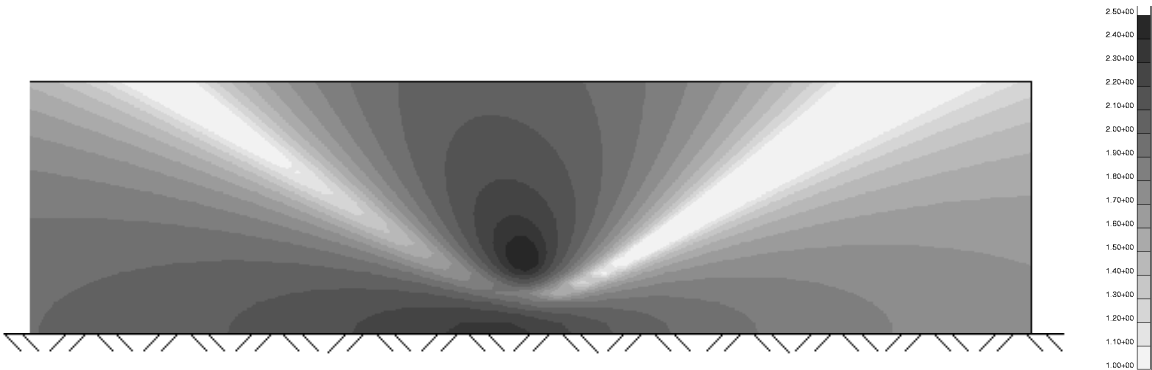


Abbildung 3.6: Schalldruckamplitude  $|\hat{p}(\mathbf{x})|$  (Frequenzbereich) für eine Punktquelle ( $h_Q = 1,5\text{ m}$ ,  $f = 100\text{ Hz}$ ) in einer Strömung ( $M = 0,3$ ) über schallhartem Boden.

Stromauf dagegen staut sich die Welle und bewegt sich langsamer fort. Betrachtet man die Amplitude des harmonischen Signals, so erkennt man schon bei der Abbildung 3.5 im Zeitbereich, dass die Maxima und Minima gegen die Strömungsrichtung stärker ausgeprägt sind. Die Amplitudendarstellung in Abb. 3.6 unterstreicht diese Beobachtung. Die Strömung bewirkt ein

unsymmetrisches Amplitudenbild, dort ist eine Verschiebung der höheren Druckamplituden in Richtung stromauf zu erkennen.

Die Strömung ist in diesem Beispiel mit einer Machzahl von  $M = 0,3$  angenommen, was in Luft ( $c = 340 \frac{m}{s}$ ) einer Strömungsgeschwindigkeit von  $V_0 = 102 \frac{m}{s}$  entspricht. Betrachtet man Schallausbreitung im Freien unter üblichen meteorologischen Bedingungen, so treten in der dort vorhandenen Luftströmung wesentlich geringere Machzahlen auf. Die Auswirkungen einer homogenen konstanten Strömung im kleinen Machzahlbereich bis etwa  $M = 0,1$  sind für das menschliche Ohr kaum wahrnehmbar. Der allseits bekannte und auch nach den Normen für die Berechnung der Schallausbreitung im Freien [56] zu berücksichtigende *Mitwindeffekt* muss daher andere Ursachen haben. Diese liegen hauptsächlich in der in Abschnitt 2.3.3 erläuterten Refraktion.



### 3.3 Geschichtetes Medium: Substrukturtechnik

Die Verwendung der Randelementmethode setzt wie in den vorangehenden Abschnitten erläutert die Kenntnis einer Fundamentallösung voraus, was - abgesehen von wenigen Ausnahmen - mit der Betrachtung von homogenen Gebieten einhergeht. Liegen in einem Problem bereichsweise konstante Teilgebiete vor, so kann jeder Teilbereich für sich mit der BEM berechnet werden. Die Kopplung der Teilbereiche kann mit Hilfe der sog. *Substrukturtechnik* erfolgen. Diese wird im Folgenden erläutert und danach für den speziellen Fall der Kopplung von Gebieten mit unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeit erweitert.

#### 3.3.1 Kopplung von Teilgebieten mit ruhendem Medium

Die Substrukturtechnik wird am Beispiel zweier bereichsweise homogener Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  gezeigt, die am gemeinsamen Rand  $\Gamma^I$  miteinander gekoppelt sind (siehe Abbildung 3.7). Dieser gemeinsame Rand wird als *Interface* bezeichnet. Werte auf dem Interface werden hier mit dem Exponenten  $I$  gekennzeichnet. Die Indizes kennzeichnen die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Teilgebiet. Die führende Feldgröße ist der Druck  $p$ , der zugehörige Fluss  $\partial p / \partial n$  auf dem Rand bzw. Interface soll hier mit  $q$  bezeichnet werden.

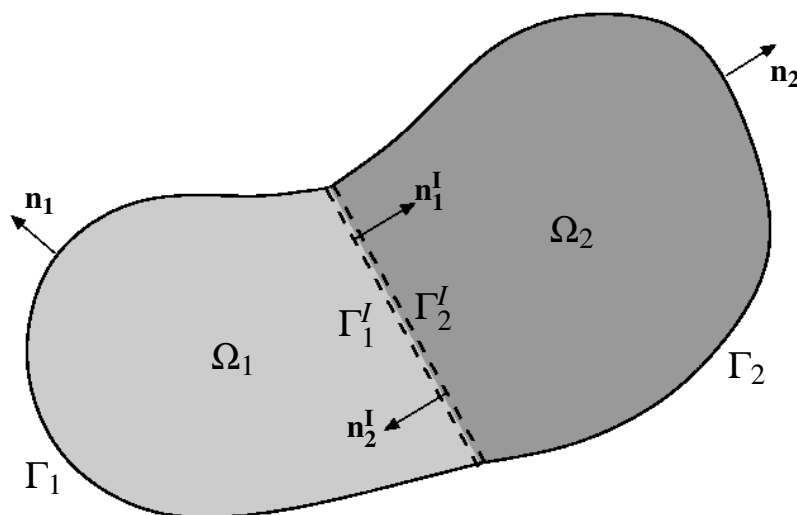


Abbildung 3.7: Bezeichnungen bei der Kopplung zweier Substrukturgebiete.

Für jedes Teilgebiet wird zunächst separat ein Gleichungssystem aufgestellt, wobei die Rand- bzw. Übergangsbedingungen als unbekannte Werte  $p^I$  und  $q^I$  in die Gleichungssysteme einge-

hen:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_1^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1^I \end{Bmatrix} \\ \text{bzw.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_2^I \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

In den beiden unabhängigen Gleichungssystemen in Gl. (3.46) tauchen dann die Werte  $p^I$  und  $q^I$  auf dem Interface jeweils zweimal auf, einmal in Form von  $p_1^I$  bzw.  $q_1^I$  auf  $\Gamma_1^I$  als Begrenzung des Gebiets  $\Omega_1$  und einmal - mit  $p_2^I$  bzw.  $q_2^I$  bezeichnet - auf  $\Gamma_2^I$  als Begrenzung des Gebiets  $\Omega_2$ . Um die beiden Gebiete zu koppeln, benötigt man Übergangsbedingungen, die am Interface wie folgt formuliert werden:

$$p_1^I = p_2^I, \quad q_1^I = -q_2^I. \quad (3.47)$$

Das negative Vorzeichen in der Übergangsbedingung für den Fluss  $q = \frac{\partial p}{\partial n}$  kommt daher, dass die Normalen der beiden Teilgebiete jeweils nach außen und damit in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Fügt man die beiden Gleichungssysteme der Teilgebiete aus Gl. (3.46) unter Verwendung der Übergangsbedingungen aus Gl. (3.47) in ein Gesamtgleichungssystem zusammen, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_1^I \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^I & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1^I \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Anschließend werden die unbekannten Größen auf die linke und die bekannten Größen auf die rechte Seite sortiert. Für ein reines NEUMANN-Problem (Druck  $p$  unbekannt, Fluss  $q$  bekannt auf dem Rand  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ), ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^I & \mathbf{G}_1^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \mathbf{G}_2^I & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_1^I \\ \mathbf{q}_1^I \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Zur Verifikation der Substrukturtechnik ist in Abbildung 3.9 der Vergleich dargestellt zwischen einem homogenen Gebiet und demselben aus zwei gekoppelten Teilgebieten zusammengesetzten Gebiet. Das 2D-Beispiel besteht aus einem Rechteck ( $l \times b = 2m \times 1m$ ), bei dem in einer Ecke eine unsymmetrische Anregung in Form einer Schallschnelle von  $u_n = -\partial\phi/\partial n = 1m/s$  normal zum Rand aufgebracht wird. Die Anregungsfrequenz beträgt  $f = 100Hz$ . Diese NEUMANN-Randbedingung wird, wie in Abb. 3.8 gezeigt, über drei Elemente angesetzt, die man sich wie eine Lautsprechermembran vibrierend vorstellen kann. Das Rechteck wird zunächst als *ein* zusammenhängendes Gebiet diskretisiert (Abb. 3.9(a)). Der Rand wird in 60 Knoten und 60 Elemente diskretisiert. Um die Druck- bzw. Potenzialverteilung im Innern des Gebiets darstellen zu können, wird mit  $40 \times 20$  Innenpunkten ein Netz generiert, das vom Rand einen Abstand von einer halben Randelementlänge hat. Dieser Abstand muss gewährleistet sein,

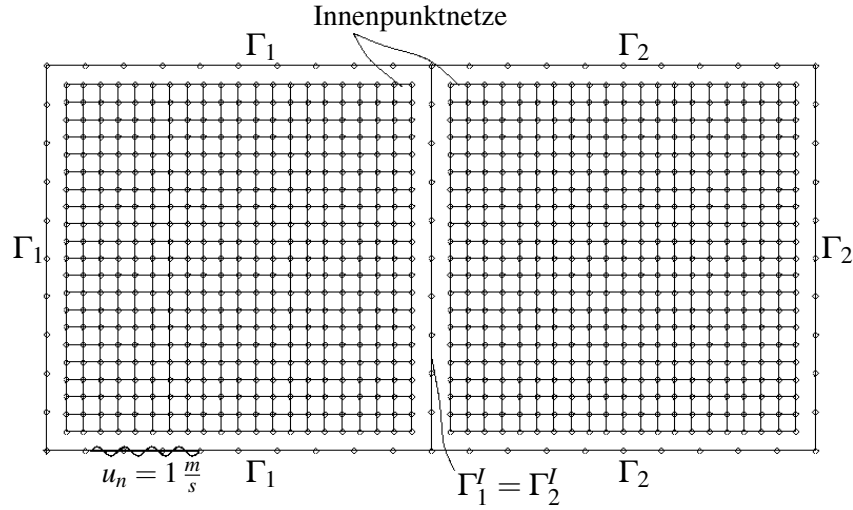
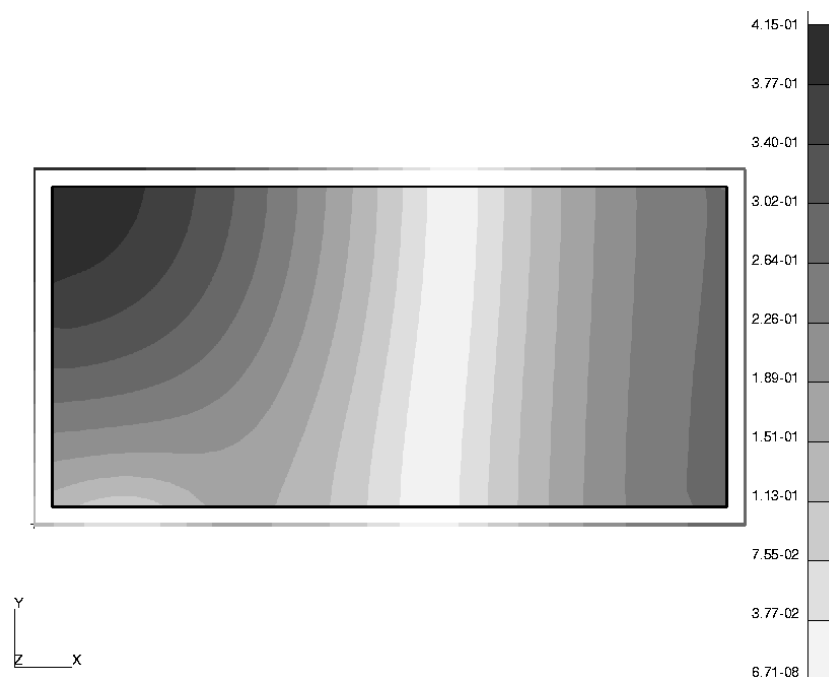


Abbildung 3.8: Diskretisierung des Gebiets als zwei gekoppelte Teilgebiete (Substrukturtechnik) mit unsymmetrischer Anregung.

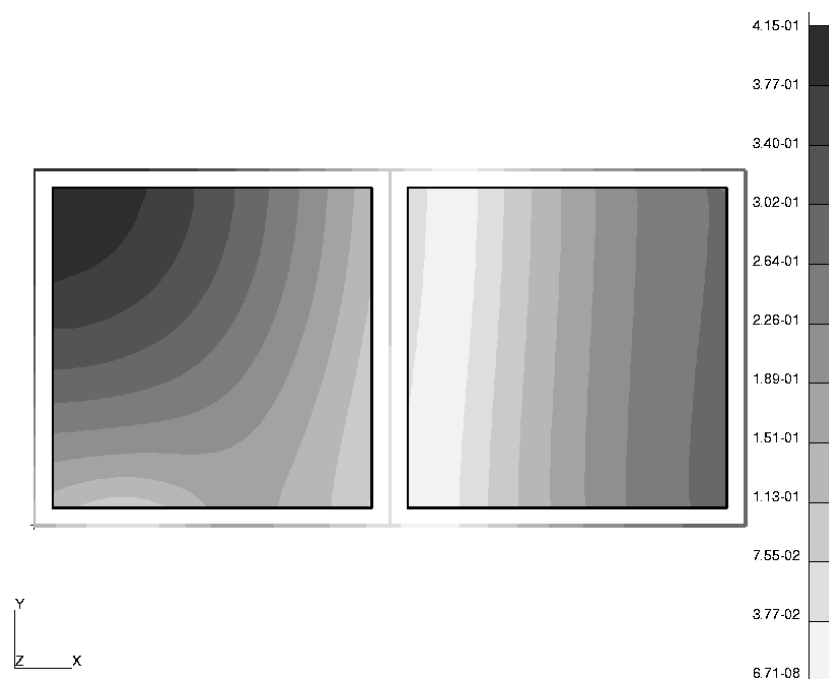
da die Auswertung von Innenpunkten mit Gl. (3.9) in sehr geringem Abstand zum Rand keine verlässlichen Werte liefert.

Dasselbe Rechteck ist in Abb. 3.9(a) in zwei Teilgebiete (je  $l \times b = 1\text{ m} \times 1\text{ m}$ ) unterteilt. Das linke Teilgebiet  $\Omega_1$  wird begrenzt von drei Seiten  $\Gamma_1$  sowie dem gemeinsamen Interface  $\Gamma^I$ . Dasselbe Interface und die übrigen drei Kanten ergeben zusammen den Rand  $\Gamma_2$  des rechten Teilgebiets  $\Omega_2$ . Da für jedes der beiden Teilgebiete jeweils das Interface ein Teil des Randes darstellt, müssen die Innenpunkte als zwei getrennte Netze (je  $20 \times 20$  Knoten) generiert werden.

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Lösung aus der Substruktur-Berechnung (Abb. 3.9(b)) mit dem ungeteilten Gebiet (Abb. 3.9(a)). In Abb. 3.10 ist die Lösung in einem horizontalen Schnitt durch das Gesamtgebiet bzw. die beiden Teilgebiete dargestellt, um die Güte des Ergebnisses mit Substruktur deutlich zu machen.



(a) Rechteck als ein Gesamtgebiet.



(b) Rechteck als zwei gekoppelte Teilgebiete (Substrukturtechnik).

Abbildung 3.9: Verifikation der Substrukturtechnik: Vergleich der Lösungen für ein geteiltes und ein ungeteiltes Gebiet; dargestellt sind die Amplituden des Geschwindigkeitspotenzials.

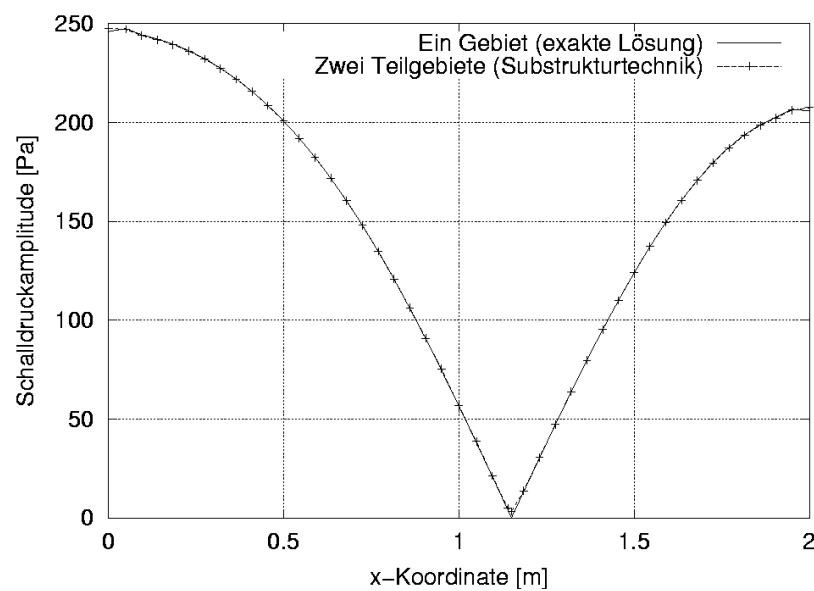


Abbildung 3.10: Vergleich der Schalldruckdruckamplituden in horizontalem Schnitt auf halber Höhe ( $y = 0,5$ ) durch das Rechteckgebiet.

### 3.3.2 Kopplung von Teilgebieten mit strömendem Medium

In diesem Abschnitt soll die Substrukturtechnik modifiziert werden, um das Schallfeld in einem Gebiet berechnen zu können, das aus mehreren Bereichen besteht. Diese Bereiche sollen außer durch unterschiedliche Materialien auch durch unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten gekennzeichnet sein. Es wird ein Medium betrachtet, welches - wie in Abbildung 3.11) dargestellt - parallel geschichtet ist und die Strömungsvektoren ebenfalls parallel zu diesen Schichten verlaufen. Die Betrachtung erfolgt unter der Annahme einer wirbelfreien Strömung ( $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ ), d.h. unter Vernachlässigung von Grenzschichteffekten.

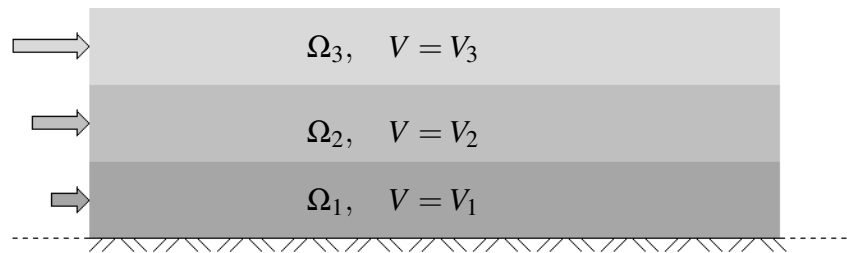


Abbildung 3.11: Aufbau eines geschichteten Gebiets mit bereichsweise homogenen strömenden Medien mit den Geschwindigkeiten  $V_1$ ,  $V_2$  bzw.  $V_3$ .

Für ein Fluid mit gleichförmiger stationärer Strömung gilt die Beziehung zwischen Druck  $p$  und dem Geschwindigkeitspotenzial  $\phi$ :

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \phi. \quad (3.50)$$

Ersetzt man darin  $p = \hat{p}e^{i\omega t}$  und  $\phi = \hat{\phi}e^{i\omega t}$ , so erhält man die entsprechenden Beziehungen im Frequenzbereich:

$$\hat{p} = \rho i\omega \hat{\phi} + \rho \mathbf{V} \nabla \hat{\phi}. \quad (3.51)$$

Da im Folgenden mit dem Druck bzw. dem Geschwindigkeitspotenzial immer die Werte im Frequenzbereich gemeint sind, wird auf die Kennzeichnung mit „ $\hat{\phantom{x}}$ “ verzichtet. Die Beziehung zwischen Schallschnelle  $\mathbf{v}$  und Geschwindigkeitspotenzial  $\phi$  ist gegeben durch

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi. \quad (3.52)$$

Die Übergangsbedingungen am Interface zwischen zwei Teilgebieten lauten generell formuliert

$$p_1^I = p_2^I, \quad v_{1n}^I = -v_{2n}^I. \quad (3.53)$$

Dies bedeutet, dass der Druck am Übergang vom einen ins andere Medium stetig sein muss (Kräftegleichgewicht) und dass die Geschwindigkeiten normal zum Interface in beiden Medien gleich sein müssen, also keine Lücke oder Überlappung entstehen darf (Kontinuität).

Im Fall des ruhenden Mediums sind diese Forderungen identisch mit den Bedingungen aus Gl. (3.47). Für ein strömendes Fluid ist bei den Übergangsbedingungen einige Vorsicht geboten.

Hier muss unterschieden werden zwischen Druck- und Potenzialformulierung. Im Geschwindigkeitspotenzial geschrieben lauten die Bedingungen

$$\rho_1 i\omega\phi_1 + \rho_1 V_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \rho_2 i\omega\phi_2 + \rho_2 V_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial x} \quad (3.54)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\frac{\partial\phi_2}{\partial n} \quad (3.55)$$

Das Einsetzen dieser Übergangsbedingungen zur Aufstellung eines Gesamt-Gleichungssystems stellt deshalb eine Schwierigkeit dar, weil die Beziehung zwischen  $p$  und  $\phi$  im Gegensatz zum homogenen Fall ohne Strömung im allgemeinen nicht mehr direkt proportional ist und aus dem Druck  $p$  nicht explizit das Geschwindigkeitspotenzial  $\phi$  bestimmt werden kann. Es ist daher nicht möglich, Gleichung (3.54) in der Druckformulierung zu schreiben.

Um zwei Gebiete mit Strömung zu koppeln, wird die Tatsache genutzt, dass die Strömungsrichtung  $x$  mit der Tangentenrichtung  $t$  des Interfaces zusammenfällt, da hier nur Strömungen parallel zu den Schichten betrachtet werden. Der Strömungsvektor  $\mathbf{V}$  reduziert sich auf den skalaren Wert  $V$  der Strömung in  $x$ -Richtung. Die Übergangsbedingung (3.54) kann damit ausgedrückt werden als

$$\rho_1 i\omega\phi_1 + \rho_1 V_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \rho_2 i\omega\phi_2 + \rho_2 V_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial t}. \quad (3.56)$$

Mit der Diskretisierung des Interfaces durch Ansatzfunktionen  $N_k$  kann die Tangentialableitung ersetzt werden durch

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \phi_k \frac{\partial N_k}{\partial t}(\mathbf{x}). \quad (3.57)$$

Dies soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Es wird ein reines Interface betrachtet, d.h.  $\Gamma = \Gamma^I$  und  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{0\}$ , mit nur  $N_I = 2$  Knoten und linearen Ansatzfunktionen. Das Aufstellen des Gleichungssystems erfolgt zunächst ungekoppelt für die beiden Teilsysteme und führt zu:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & H_{34} \\ 0 & 0 & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & G_{34} \\ 0 & 0 & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_3 \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_4 \end{Bmatrix}, \quad (3.58)$$

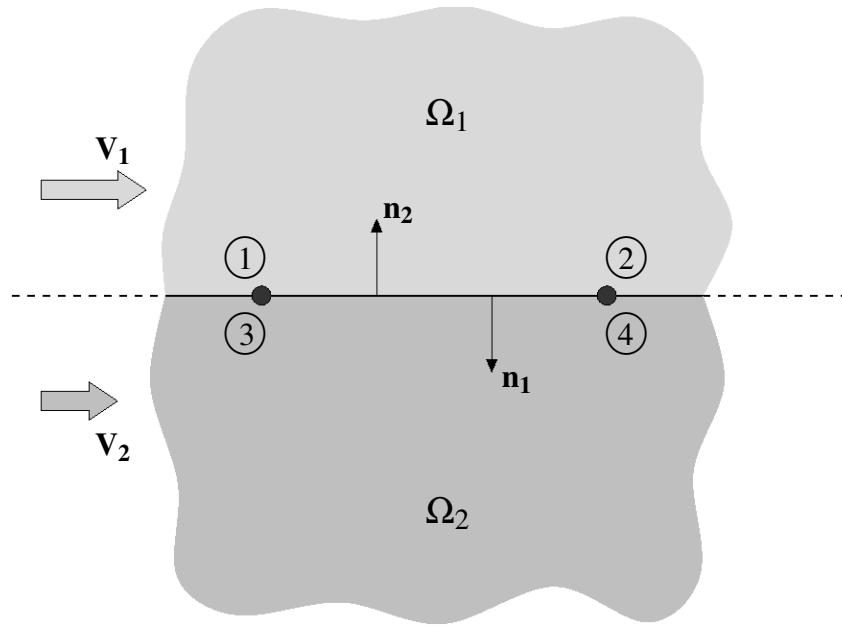


Abbildung 3.12: Beispiel: Kopplung zweier halbunendlicher Gebiete mit nur zwei Interfaceknoten.

mit den Übergangsbedingungen

$$\begin{aligned} \rho_1 i \omega \phi_1 + \rho_1 V_1 \cdot \left( \phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial t}(x_1) + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial t}(x_1) \right) &= \\ &= \rho_2 i \omega \phi_3 + \rho_2 V_2 \cdot \left( \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial t}(x_3) + \phi_4 \frac{\partial N_4}{\partial t}(x_3) \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 i \omega \phi_2 + \rho_1 V_1 \cdot \left( \phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial t}(x_2) + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial t}(x_2) \right) &= \\ &= \rho_2 i \omega \phi_4 + \rho_2 V_2 \cdot \left( \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial t}(x_4) + \phi_4 \frac{\partial N_4}{\partial t}(x_4) \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_1 = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_3 \quad (3.61)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_2 = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_4. \quad (3.62)$$

Diese Übergangsbedingungen stellen lineare Beziehungen zwischen den diskreten Knotenwerten  $\phi_i$  und  $(\partial \phi / \partial n)_i$  dar. Mit Hilfe dieser Beziehungen kann das entkoppelte Gleichungssystem (3.58) in ein streng gekoppeltes überführt werden. Die linearen Gleichungen (3.59) und (3.60) können vereinfacht geschrieben werden als

$$c_{11} \phi_1 + c_{12} \phi_2 + c_{13} \phi_3 + c_{14} \phi_4 = 0 \quad (3.63)$$

$$c_{21} \phi_1 + c_{22} \phi_2 + c_{23} \phi_3 + c_{24} \phi_4 = 0 \quad (3.64)$$



bzw. als System von Übergangsbedingungen geschrieben

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{0}\}. \quad (3.65)$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich umformen in ein System

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{0}\}. \quad (3.66)$$

Allgemein formuliert für eine größere Anzahl  $N_I$  an Interfaceknoten kann man Gleichung (3.65) schreiben als

$$[\mathbf{C}_1^I \quad \mathbf{C}_2^I] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{0}\}, \quad (3.67)$$

bzw. Gleichung (3.66) als

$$[\mathbf{I} \quad \mathbf{D}_2^I] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{0}\}, \quad (3.68)$$

wobei die Matrizen  $\mathbf{C}^I$  und  $\mathbf{D}^I$  jeweils quadratische Matrizen der Größe  $(N_I \times N_I)$  sind. Damit lassen sich alle Knotenwerte  $\phi_i$ ,  $i = 1 \dots N_I$  am Interface  $\Gamma_1^I$  als Linearkombination der Knotenwerte  $\phi_i$ ,  $i = (N_I + 1) \dots 2 \cdot N_I$  am Interface  $\Gamma_2^I$  ausdrücken. Das Gesamtgleichungssystem enthält dann nur noch  $N_I$  unbekannte Werte  $\phi$  am Interface und kann somit gelöst werden. Die im Lösungsvektor enthaltenen Potenzialwerte  $\phi_1^I$  werden in Gl. (3.68) auf die rechte Seite gebracht und man erhält direkt die Lösung für  $\phi_2^I$ . Zur Ermittlung des akustischen Drucks  $p$  aus dem Geschwindigkeitspotenzial  $\phi$  wird die  $p$ - $\phi$ -Beziehung aus Gl. (3.51) verwendet.

### 3.4 Refraktierendes Medium: Konforme Abbildung

Die Verwendung der Randelementmethode ist mit wenigen Ausnahmen auf die Berechnung von homogenen Medien beschränkt, da für beliebige inhomogene Gebiete die notwendige Fundamentallösung nicht existiert. Die bei der Schallausbreitung im Freien normalerweise vorhandene Refraktion geht jedoch auf eine Inhomogenität des Mediums zurück, meist in Form einer geschichteten Atmosphäre. Will man die Refraktion für die Berechnung berücksichtigen, muss man in der Lage sein, das vertikale Profil abzubilden. In diesem Abschnitt wird ein Ansatz vorgestellt, der den Fall eines refraktierenden Mediums zurückführt auf den eines homogenen Mediums, zu dessen Berechnung die Randelementmethode in ihrer bereits vorgestellten Form verwendet werden kann.

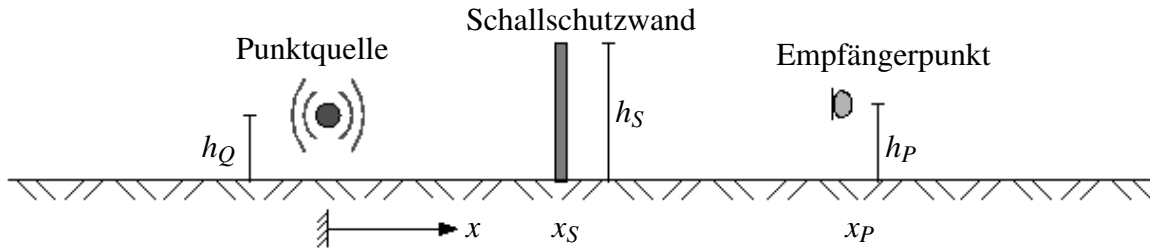


Abbildung 3.13: Ausgangsgeometrie für eine Berechnung mit dem Ansatz der Konformen Abbildung zur Simulation einer refraktierenden Atmosphäre.

Betrachtet wird im Folgenden als Schallausbreitungsgebiet ein Halbraum über einem unendlich ausgedehnten Boden mit beliebiger Impedanz. Als Last wird eine Punktquelle  $Q$  an der Stelle  $x = 0$  und  $z = h_Q$  aufgebracht. Abbildung 3.13 zeigt diese Ausgangskonfiguration. Der Schalldruck soll an einem Empfängerpunkt  $P$  mit den Koordinaten  $x = x_P$  und  $z = h_P$  ermittelt werden. Die Schallausbreitung wird beeinflusst durch eine Schallschutzwand der Höhe  $h_S$  zwischen Quelle und Empfänger, in horizontaler Entfernung  $x_S$  von der Quelle. Die Überlegungen werden hier aus Gründen der Anschaulichkeit für ein 2D-Problem im  $x$ - $z$ -Koordinatensystem angestellt. Das Verfahren kann auch auf den 3D-Fall übertragen werden, solange die Transformation nur in einer Richtung angewendet wird, d.h. die Krümmung nur in der vertikalen Ebene durch die Punktquelle und den Empfänger erfolgt. Die Differenzialgleichung, die das Schallfeld in der geschichteten Atmosphäre beschreibt, lautet allgemein:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2(z)p - \frac{2}{k} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} = -\delta(x)\delta(z - h_Q). \quad (3.69)$$

Diese lässt sich in eine vereinfachte Differenzialgleichung überführen, als Näherung für asymptotisch kurze Wellenlängen im Vergleich zu einer charakteristischen Strecke, über die die Schallgeschwindigkeit nennenswerte Änderungen aufweist:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2(z)p = -\delta(x)\delta(z - h_Q), \quad (3.70)$$

Es handelt sich hierbei um die HELMHOLTZ-Gleichung mit einer veränderlichen Wellenzahl  $k$ , die als Funktion der Höhe  $z$  angenommen wird. Diese Wellenzahl ist der Quotient aus der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  und der veränderlichen Schallgeschwindigkeit  $c(z)$ . Diese wird hier als effektive Schallgeschwindigkeit eingesetzt, die sich aus der mittleren Schallgeschwindigkeit und meteorologischen Einflüssen aus Temperatur und Windgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung zusammensetzt. Um die Standard-BEM zur Lösung einsetzen zu können, muss die Wellenzahl  $k$  jedoch konstant sein - was physikalisch einem homogenen Medium entspräche. Diese Umformung von Gleichung (3.70) in die Standard-HELMHOLTZ-Gleichung kann mit Hilfe einer Koordinatentransformation erreicht werden. Diese Transformation resultiert in einer Verschiebung und Verzerrung des Gebietsrandes.

Für die veränderliche Wellenzahl  $k(z)$  wird ein exponentieller Verlauf über die Höhe angenommen [36]:

$$k(z) = k_0 \cdot e^{z/\rho_K} \quad (3.71)$$

mit den Freiwerten  $k_0$  - der die Wellenzahl am Boden ( $z = 0$ ) angibt - und  $\rho_K$ , welcher als Krümmungsradius der Schallstrahlen ein Maß für die Refraktion darstellt. Der exponentielle Verlauf der Wellenzahl  $k(z)$  kann auch ausgedrückt werden als Profil der effektiven Schallgeschwindigkeit  $c_{eff}$  zu

$$c(z) \approx c_0 \cdot (1 - z/\rho_K), \quad (3.72)$$

wobei darin schon die Annahme kleiner Höhen  $z$  im Verhältnis zum Krümmungsradius  $\rho_K$  eingegangen ist, also  $z/\rho_K \ll 1$ . Die Transformationsvorschriften für die Koordinaten lauten:

$$\tilde{x} = \rho_K \cdot e^{z/\rho_K} \sin(x/\rho_K), \quad \tilde{z} = \rho_K \cdot e^{z/\rho_K} \cos(x/\rho_K). \quad (3.73)$$

Der Koordinatenursprung ( $x = 0, z = 0$ ) liegt am Boden unterhalb der Punktquelle, der Ursprung des transformierten Systems liegt im Mittelpunkt des Krümmungskreises. Setzt man die Transformationsvorschriften in Gleichung (3.70) ein, so erhält man im neuen  $\tilde{x}$ - $\tilde{z}$ -Koordinatensystem:

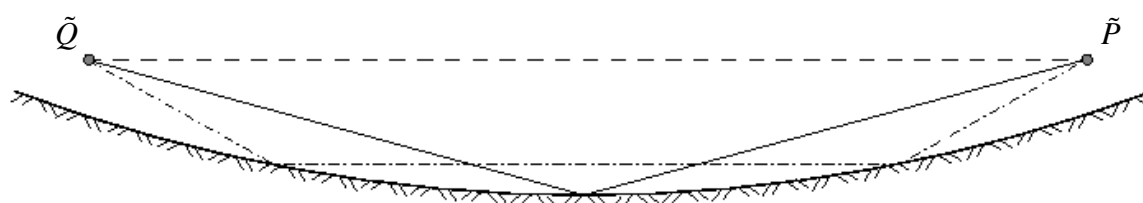
$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{z}^2} + k_0^2 p = -\delta(\tilde{x})\delta(\tilde{z} - \tilde{z}_Q). \quad (3.74)$$

Was mathematisch die Wellenzahl  $k(z)$  mit ihrer Höhenabhängigkeit in eine Konstante  $k_0$  überführt, bedeutet geometrisch die Verformung des unendlichen Bodens von einer Ebene in eine Zylinderoberfläche. Dies ist anschaulich in Abbildung 3.14 dargestellt. Zur Verdeutlichung der Analogie sind drei Schallstrahlen vom Punkt  $Q$  zum Punkt  $P$  eingezeichnet, die in der Ausgangskonfiguration auf Grund der Refraktion gekrümmt verlaufen, im transformierten Koordinatensystem jedoch zu Geraden bzw. Geradenstücken werden. Die Schallausbreitung auf geraden Pfaden - also ohne Refraktion - findet nur in homogenen Medien statt. Das homogene Medium, in dem die Schallausbreitung rechnerisch mit der Randelementmethode erfolgen kann, besitzt hier die Wellenzahl  $k_0 = \omega/c_0$ .

Je nachdem, ob es sich in der Ausgangskonfiguration um eine aufwärts oder abwärts refraktierende Atmosphäre handelt, ist die Form des transformierten Randes konvex oder konkav. Es ändert sich dabei das Vorzeichen des Krümmungsradius'  $\rho_K$ . Ein positives  $\rho_K$  bedeutet - eingesetzt in Gl. (3.72) - eine mit der Höhe abnehmende Schallgeschwindigkeit und daher eine aufwärts brechende Atmosphäre mit vom Boden weg gekrümmten Schallstrahlen.



(a) Ausgangskonfiguration mit refraktierender Atmosphäre.



(b) Analoge Konfiguration in homogener Atmosphäre mit Konformer Abbildung.

Abbildung 3.14: Analogie zwischen (a) refraktierender (geschichteter) Atmosphäre über ebenem Boden und (b) homogener Atmosphäre über gekrümmtem Boden; Transformation dreier verschiedener von  $Q$  nach  $P$  laufender Schallstrahlen.

Der Einfluss unterschiedlicher Refraktion wird in Abbildung 3.15 gezeigt. In der zu Grunde liegenden Berechnung ist als Anregung eine Punktquelle ( $f = 100\text{ Hz}$ ) in  $h_Q = 1\text{ m}$  über schallhartem Boden angesetzt. Für die Refraktion in der Atmosphäre wird als Parameter der Krümmungsradius  $\rho_K = 300\text{ m}$  festgelegt. Im Abstand  $x = 8\text{ m}$  von der Quelle befindet sich eine Schallschutzwand der Höhe  $h_S = 1,7\text{ m}$ . Die Ergebnisse werden an Punkten in variabler Entfernung von der Quelle in gleicher Höhe ausgewertet.

Dargestellt ist ein relativer Schalldruckpegel in Abhängigkeit der horizontalen Distanz von der Punktquelle, also der  $x$ -Koordinate. Der Bezugsschalldruck ist hierbei der Freifelddruck in  $1\text{ m}$  Entfernung von der Quelle. Die beiden Kurven repräsentieren zwei unterschiedliche Arten der Refraktion, die aufwärts und die abwärts gerichtete Refraktion. Die Position der Schallschutzwand (bei  $x_S = 8\text{ m}$ ) ist eingezeichnet. Es wird deutlich, dass der Einfluss der Refraktion sich erst mit zunehmender Entfernung bemerkbar macht. Auf der der Quelle zugewandten Seite der Schallschutzwand im Bereich von wenigen Metern Abstand zur Quelle ist noch kein Unterschied zwischen den Kurven zu erkennen. Mit zunehmendem Abstand jedoch resultiert die abwärts refraktierende Atmosphäre in höheren Schalldruckpegeln, da die Schallstrahlen in Richtung Boden gebrochen werden, in dessen Nähe üblicherweise das Schallfeld von Interesse ist.

Abbildung 3.16 zeigt ein weiteres Beispiel einer zweidimensionalen BEM-Rechnung mit der konformen Abbildung. Dargestellt sind die Schalldruckfelder (als Amplituden im logarithmischen Maßstab) für dieselbe geometrische Situation, jedoch für unterschiedliche meteorologische Bedingungen dargestellt. Als Geometrie ist ein Lärmschutzwall der Höhe  $h_W = 3\text{ m}$  ge-

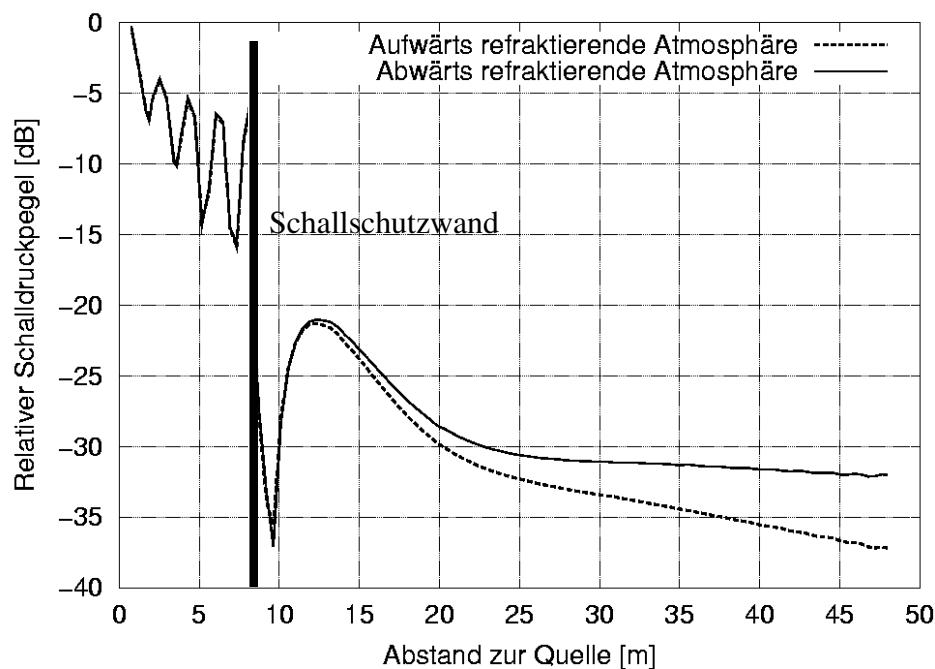


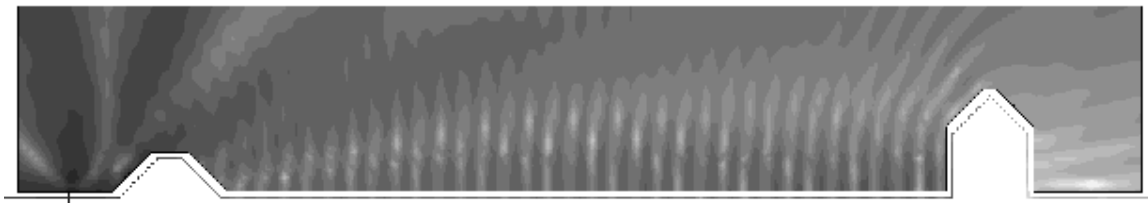
Abbildung 3.15: Vergleich der relativen Schalldruckpegel zwischen abwärts und aufwärts refraktierender Atmosphäre.

wählt, der eine Häuserzeile ( $h_H = 8\text{ m}$ ) von einer Linienquelle abschirmen soll. Der Boden ist als teilweise absorbierender Boden mit der Impedanz einer grasbewachsenen Oberfläche modelliert. Die Quelle mit einer Anregungsfrequenz von  $f = 100\text{ Hz}$  befindet sich ca.  $4\text{ m}$  vor dem Dammfuß. Die dargestellten Ergebnisse sind für ein Netz von Innenpunkten ausgewertet, welches die Abmessung von ca.  $100\text{ m} \times 15\text{ m}$  besitzt. Der Grad der Refraktion wird durch den Krümmungsradius  $\rho_K = \pm 200\text{ m}$  beschrieben, was einer sehr starken Refraktion entspricht, so dass die Auswirkungen schon über geringe Distanzen sichtbar sind.

In Abb. 3.16(a) nimmt die effektive Schallgeschwindigkeit mit der Höhe ab, der Schall wird durch die Schichtung der Atmosphäre nach oben gebrochen. Dies entspricht etwa einer Temperaturschichtung an sonnigen Tagen, wo die Luft in der Nähe des Bodens am wärmsten ist und der Schall dort mit größerer Geschwindigkeit transportiert wird als in höheren kühleren Luftschichten. Im Gegensatz dazu ist in Abb. 3.16(b) ein abwärts refraktierendes Medium angenommen, welches die Schallstrahlen zum Boden hin bricht. In beiden Fällen bildet sich zwischen der Quelle bzw. dem Lärmschutzwand und der Häuserzeile eine stehende Welle aus. Die Maxima dieser stehenden Welle sind für den Fall der abwärts refraktierenden Atmosphäre (Abb. 3.16(b)) größer. Dies liegt daran, dass die Energie nicht wie in Abb. 3.16(a) nach oben und damit vom Empfänger weg refraktiert wird, sondern sich im Gegenteil am Boden bündelt. In der Regel stellt eine abwärts refraktierende Atmosphäre den ungünstigsten und somit maßgebenden Lastfall dar.



(a) Aufwärts refraktierende Atmosphäre.



(b) Abwärts refraktierende Atmosphäre.

Abbildung 3.16: Beispiel zur Simulation von (a) aufwärts und (b) abwärts brechender Atmosphäre mit Hilfe der Konformen Abbildung; Damm als Lärmschutzmaßnahme für ein Wohngebiet.

# Kapitel 4

## Strahlenverfahren

Strahlenverfahren wurden ursprünglich als Visualisierungshilfe bei der Konstruktion von Automobilen oder in der Architektur entwickelt. Sie sind in der Literatur fast ausschließlich unter dem Namen „Raytracing“ bekannt. Heute finden sie speziell in der Berechnung von dreidimensionalen Computergrafiken Anwendung. Sie stellen ein Instrument dar, das dreidimensionale Gebilde möglichst plastisch und wirklichkeitsgetreu als zweidimensionale Projektion grafisch darstellen soll. Dazu ist es notwendig, Effekte wie Schattenbildung, Reflexion und gegebenenfalls Brechung zu berücksichtigen.

In diesem Kapitel werden zunächst einführend die grundlegenden Eigenschaften von geometrischen Verfahren in der Akustik betrachtet, um dann ein spezielles Strahlenverfahren vorzustellen, welches im Rahmen dieser Arbeit numerisch implementiert und zur Kopplung mit der Randelementmethode eingesetzt wird.

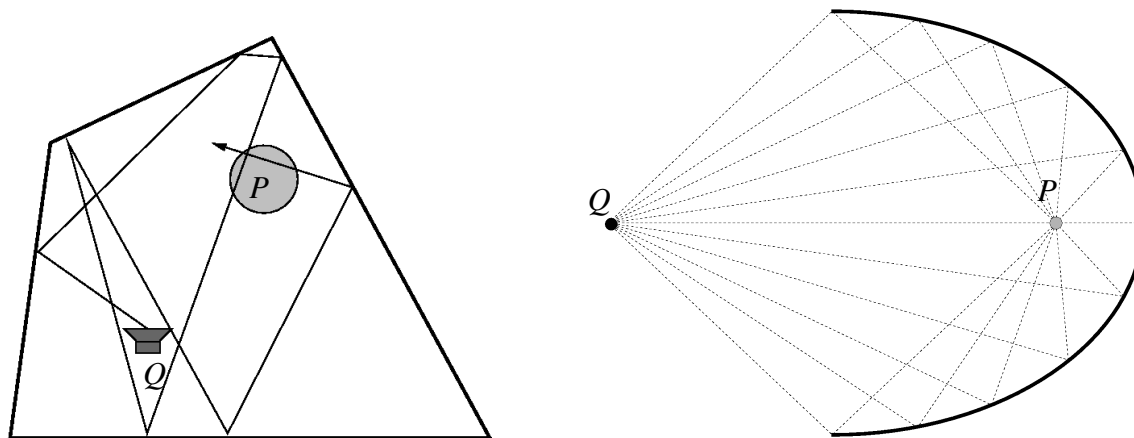
### 4.1 Geometrische Akustik

Eine rein geometrische Betrachtung der Schallausbreitung bedeutet, dass der Wellencharakter des Schalls vernachlässigt wird. Statt dessen wird die Schallausbreitung als Bewegung von Partikeln beschrieben, die Energie enthalten und transportieren. Der Pfad, den ein solches Partikel zurücklegt, wird als Schallstrahl bezeichnet (vgl. Abschnitt 2.3). Bei dieser Betrachtungsweise des Schalls in Form von Strahlen können für die Reflexion die Gesetze aus der Optik verwendet werden.

Die Arbeitsweise des Raytracing lässt sich am besten am Beispiel der Optik erklären. Das Betrachten eines Gegenstandes durch das menschliche Auge kann man physikalisch so auffassen, dass ein von einer Lichtquelle ausgesendeter Strahl an Objekten in der Szenerie reflektiert oder gebrochen wird und schließlich auf das Auge des Betrachters trifft. Dieses wird im Raytracingverfahren durch eine Projektionsfläche ersetzt. Trifft ein Lichtstrahl auf seinem Weg zur Projektionsfläche auf ein Objekt, so wird je nach Geometrie und Oberflächenbeschaffenheit am Auftreffpunkt die weitere Ausbreitung in Intensität und Richtung bestimmt. Der Schnittpunkt mit der Projektionsfläche kann dann mit der entsprechenden Farbe bzw. Intensität gezeichnet werden.

Raytracing kann jedoch nicht nur in der Optik eingesetzt werden, sondern ist vielmehr überall dort einsetzbar, wo eine wellenförmige Ausbreitung auch durch den Transport von Teilchen abgebildet werden kann. Dies ist gerechtfertigt, wenn die Wellenlänge im Ausbreitungsmedium sehr viel kleiner ist als die charakteristische Länge der im betrachteten Raum vorhandenen Objekte. Bei der Schallausbreitung in Gebäuden und im Freien bewegt sich die charakteristische Länge der Objekte in der Regel im Bereich einiger Meter. Die Bedingung bzw. Annahme kleiner Wellenlängen trifft somit nicht für die niedrigen Frequenzen des Hörschallbereichs zu.

Die häufigste Anwendung finden Raytracingverfahren für die Schallausbreitung im Bereich der Raumakustik. Bei der Schallausbreitung in geschlossenen Räumen wie Büros oder Konzertsälen kann man in der Regel ein homogenes Ausbreitungsmedium annehmen. Die Pfade, auf denen sich der Schall dann ausbreitet, sind in diesem Fall Geradenstücke (siehe Abb. 4.1), was eine wesentliche Vereinfachung für die Berechnung darstellt. Üblicherweise werden Verfahren



(a) Schallstrahlenbild für einen homogenen Raum mit Empfängerfläche  $P$ . (b) Schallstrahlenbündelung im Brennpunkt  $P$  einer Ellipse.

Abbildung 4.1: Beispiele geometrischer Akustik.

im Zeitbereich verwendet, die die Ausbreitung eines Strahls zeitlich inkrementell verfolgen. Der Empfänger wird wie in Abb. 4.1(a) dargestellt als Fläche definiert und alle ausgesendeten Strahlen auf Schnittpunkte mit der Empfängerfläche überprüft. Aus allen eintreffenden Strahlen wird dann anhand ihrer Ausbreitungsgeschichte (Ausbreitungsdauer bis zum Empfänger, Anzahl und Art der Reflexionen) das Zeitsignal am Empfänger zusammengesetzt.

Abb. 4.1(b) zeigt das Beispiel einer Ellipse, wobei eine punktförmige Schallquelle in einen Brennpunkt  $Q$  und ein Empfänger in den zweiten Brennpunkt  $P$  der Ellipse gesetzt wird. Die geometrische Akustik sagt - den Gesetzen der Geometrie folgend - einen unendlich hohen Schalldruck in  $P$  voraus, da jeder von der Quelle ausgesandte Schallstrahl dort eintrifft.

Grundsätzlich kann man ein Raytracingverfahren in zwei wesentliche Berechnungsschritte unterteilen: Im ersten Schritt werden diejenigen Strahlen ermittelt, die - ausgesendet von der Schallquelle - den Empfänger erreichen. Im zweiten Schritt werden die Anteile dieser Strahlen berechnet und zum Gesamtschalldruck am Empfänger aufaddiert.



## 4.2 Semianalytisches Verfahren nach SALOMONS

Es gibt eine große Zahl an Raytracingverfahren mit unterschiedlichen, teilweise sehr spezifischen Eigenschaften. Es ist daher für den konkreten Fall abzuwägen, welchen Anforderungen das Verfahren genügen muss und welcher Rechenaufwand in Kauf genommen werden kann.

Aus der Absicht, das Raytracingverfahren mit einer Randelementmethode zu koppeln, ergibt sich ein erstes Anforderungskriterium an das einzusetzende Verfahren: Da die verwendete Randelementformulierung im Frequenzbereich arbeitet, bietet es sich an, auch ein Raytracingverfahren im Frequenzbereich zu wählen.

Bei der Schallausbreitung im Freien tritt der Effekt der Refraktion auf, der durch ein nicht konstantes Wind- oder Temperaturprofil zustande kommen kann. Für das Gebiet, in dem Raytracing angewendet werden soll, interessiert in erster Linie diese Refraktion, die durch kontinuierliche Änderung der Materialeigenschaften über die Höhe in gekrümmten Schallstrahlen resultiert. Die Mehrfachreflexion am Boden bei größeren Distanzen soll ebenfalls berücksichtigt werden können. Vor allem die Forderung, gekrümmte Schallstrahlen zuzulassen, schließt die Verfahren für homogene Medien aus, die üblicherweise in der Raumakustik verwendet werden.

Das hier verwendete Modell nach SALOMONS geht wie viele Raytracingverfahren von einer punktförmigen Quelle aus. Es wird ein rechtwinkliges  $x$ - $z$ -Koordinatensystem eingeführt, das in der vertikalen Ebene durch die Quelle  $Q$  und den Empfänger  $P$  aufgespannt wird. Diese Situation ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Dabei bezeichnet die Variable  $\Delta x$  den horizontalen Abstand zwischen Quelle und Empfänger. Der Quellpunkt hat somit die Koordinaten  $(0, z_Q)$ , der Empfänger liegt bei  $(\Delta x, z_P)$ .

Die Ermittlung der Strahlen, die ausgehend von der Quelle den Empfänger erreichen, stellt für die Betrachtung inhomogener Medien üblicherweise den rechenintensivsten Teil des Raytracingprogramms dar. Im Allgemeinen muss der Schallstrahl inkrementell berechnet werden, indem die differenzielle Steigung des Strahls in jedem Punkt das SNELLIUSSche Brechungsgesetz (2.33) erfüllen muss.

Das hier verwendete Verfahren berücksichtigt ein stationäres, über die Ausbreitungsdistanz gleichförmiges vertikales Profil der effektiven Schallgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 2.4.3). Von einem gleichförmigen Verlauf kann ausgegangen werden, wenn sich das Gelände in Ausbreitungsrichtung nicht wesentlich ändert. Das lineare oder logarithmische Profil wird in Form von Parametern angegeben, die den Funktionsverlauf  $c_{eff}(z)$  über die Höhe  $z$  festlegen:

$$\begin{aligned} c_{eff}^{lin}(z) &= c_0 + az \\ c_{eff}^{log}(z) &= c_0 + b \ln\left(\frac{z}{z_0} + 1\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Darin bezeichnet  $c_0$  die Schallgeschwindigkeit am Boden,  $z_0$  stellt als charakteristische Länge ein Maß für die Rauigkeit der Oberfläche dar. Die Atmosphäre ist nach Gl. (4.1) umso stärker refraktierend, je größer die positiven Parameter  $a$  bzw.  $b$  gewählt werden.

Diese Parametrisierung des Schallgeschwindigkeitsprofils vereinfacht die Ermittlung der Schallstrahlen erheblich. Der Verlauf aller Strahlen ist im Prinzip durch das bekannte  $c_{eff}$ -Profil und die Lage von Quelle und Empfänger eindeutig bestimmt. Bei der Berechnung der einzelnen Strahlen macht man sich zu Nutze, dass jeder Strahl bedingt durch den gleichförmigen Verlauf

des  $c_{eff}$ -Profils über die Ausbreitungsdistanz eine besondere Charakteristik aufweist: Er setzt sich aus Kurvensegmenten zusammen, die sich in horizontaler Richtung wiederholen, wenn der Strahl durch die abwärts brechende Atmosphäre mehrfach am Boden reflektiert wird (Abb. 4.2). Die Höhe  $h$ , die der Strahl im Scheitelpunkt dieser Kurvensegmente erreicht, ist dabei für jedes Segment gleich. Diese Scheitelhöhe  $h$  ist eine wichtige Kenngröße eines jeden Strahls. Sie legt das Kurvensegment des Strahls fest. Da in der Regel Quelle und Empfänger nicht am Boden liegen, wird sich ein Strahl allgemein aus einer gewissen Anzahl ganzer Kurvensegmente und zwei Teilsegmenten jeweils an Quelle und Empfänger zusammensetzen.

Eine weitere Charakteristik für die betrachteten Profile ist, dass sich die Schallstrahlen in Gruppen zu je vier Strahlen zusammenfassen lassen. Zwei davon verlassen die Quelle  $Q$  in Richtung Boden, die anderen beiden haben einen positiven Steigungswinkel. In Kombination mit der entsprechenden Situation am Empfänger  $P$  ergeben sich vier mögliche Typen  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Die Tatsache, dass die Schallstrahlen in diesem Modell nicht von der Quelle bis zum Empfänger „verfolgt“ werden, sondern ihre Lage aus Quell- und Empfängerposition unter Verwendung des  $c_{eff}$ -Profils analytisch berechnet werden kann, ist der allgemeinere Begriff „Strahlenverfahren“ hier passender als die Bezeichnung „Raytracing“.

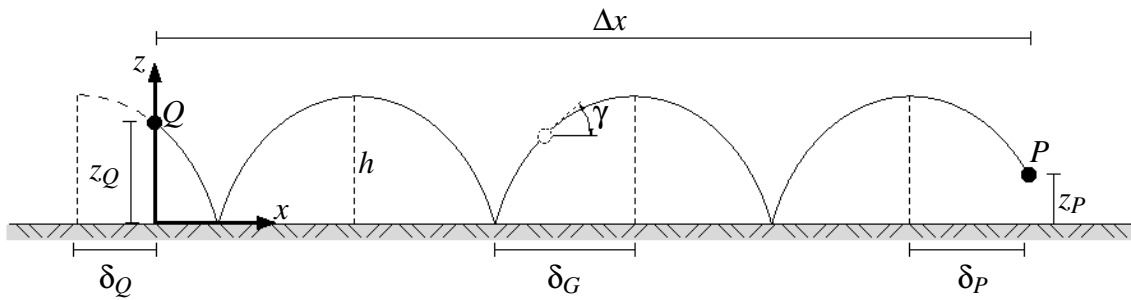


Abbildung 4.2: Schallstrahl bestehend aus Kurvensegmenten.

Es werden für die Ermittlung der zwischen Quelle und Empfänger „passenden“ Strahlen nur die horizontalen Längen  $\delta_x$  der Segmente in Abb. 4.2 betrachtet. Diese berechnen sich zu

$$\delta_x(h) = \int_{z_x}^h dx = \int_{z_x}^h \frac{dz}{\tan \gamma(z)}. \quad (4.2)$$

Hierbei steht der Index  $x$  stellvertretend für die Variablen  $Q$ ,  $G$  und  $P$ , sodass Gleichung (4.2) dreimal aufgestellt wird. Die Höhe  $z_x$  steht für die Quellhöhe  $z_Q$ , die Höhe des Bodens  $z_G = 0$  bzw. die Empfängerhöhe  $z_P$ . Der Winkel  $\gamma$  bezeichnet den Steigungswinkel des Strahls (siehe Abb. 4.2). Damit können die horizontale Länge  $\delta_Q$  des Teilsegments an der Quelle  $Q$ ,  $\delta_G$  für ein ganzes Segment oder  $\delta_P$  für das Teilsegment am Empfänger  $P$  ermittelt werden. Die Teilsegmente sind definiert als die Abschnitte von den Punkten  $Q$  bzw.  $P$  zum jeweils nächsten Scheitelpunkt.

Setzt man einen Strahl aus diesen drei Elementen zusammen, dann ergibt sich die gesamte horizontale Ausbreitungsdistanz des Strahls zu

$$\Delta x_j(h) = m_{Qj} \delta_Q(h) + 2(n + m_{Gj}) \delta_G(h) + m_{Pj} \delta_P(h). \quad (4.3)$$

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$m_{Qj}$	1	-1	1	-1
$m_{Gj}$	-1	0	0	1
$m_{Pj}$	1	1	-1	-1

Tabelle 4.1: Die Faktoren  $m_{xj}$  zur Bestimmung der horizontalen Ausbreitungsdistanz nach Gleichung (4.3).

Darin ist  $n$  die Anzahl an durchlaufenen Scheitelpunkten der Höhe  $h$ , der Index  $j$  bezeichnet einen der vier möglichen Strahlentypen ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) aus einer Gruppe  $n$ . Die ganzzahligen Faktoren  $m_{xj}$  können Tabelle 4.1 entnommen werden. Die Ermittlung der einzelnen Strahlen ergibt sich aus Gl. (4.3) folgendermaßen: Da durch die Lage von Quelle und Empfänger die gesamte horizontale Ausbreitungsdistanz  $\Delta x$  bekannt ist, kann für jede  $(n, j)$ -Kombination eine Höhe  $h$  gesucht werden, so dass gilt:

$$\Delta x_{nj}(h) \stackrel{!}{=} \Delta x. \quad (4.4)$$

Diese hinsichtlich  $h$  implizite Gleichung besitzt für jede vorgegebene  $(n, j)$ -Kombination und  $h > \max\{z_Q, z_G, z_P\}$  entweder keine, eine oder zwei Lösungen. Jede der Lösungen repräsentiert einen Schallstrahl. In Abb. 4.3 sind alle ermittelten Schallstrahlen für eine Situation mit  $z_Q = 1\text{ m}$ ,  $z_P = 1,5\text{ m}$ ,  $\Delta x = 600\text{ m}$  und einem linearen  $c_{eff}$ -Profil ( $a = 0, 1 \frac{1}{s}$ ) dargestellt.

Für den Abstand zwischen Quelle und Empfänger muss in diesem Verfahren ein Mindestmaß eingehalten werden. Dies ist nötig, da für die Ermittlung der Strahlen ein Höhenbereich festgelegt wird, in welchem nach einer Lösung  $h$  für Gleichung (4.3) gesucht wird. Diese Scheitelhöhe  $h$  kann jedoch unendlich groß werden, wenn der horizontale Abstand zwischen Quelle und Empfänger relativ klein ist bzw. wenn die Atmosphäre nur sehr schwach refraktierend ist, d.h. wenn die Krümmung der Schallstrahlen gegen null geht. Um für die numerische Berechnung den Aufwand möglichst gering zu halten, werden die Empfänger daher stets in einem gewissen Abstand platziert, zumal sich in unmittelbarer Umgebung der Quelle die Refraktion nicht auswirkt.

### 4.2.1 Geometrische Lösung

Die Summe der Anteile aller einzelnen Strahlen, die den Empfänger erreichen, ergibt die geometrische Lösung

$$p_{geom} = a_Q \sum_{m=1}^M A_m e^{i\phi_m}, \quad (4.5)$$

wobei  $a_Q$  die komplexe Quellintensität der Punktquelle bezeichnet. Die einzelnen Anteile aller  $M$  Strahlen ergeben sich aus der Amplitude  $A_m$  und der Phase  $\phi_m$ , die sich bestimmen lassen zu

$$A_m = f_m R_m^{N_m}, \quad (4.6)$$

$$\phi_m = \omega t_m. \quad (4.7)$$

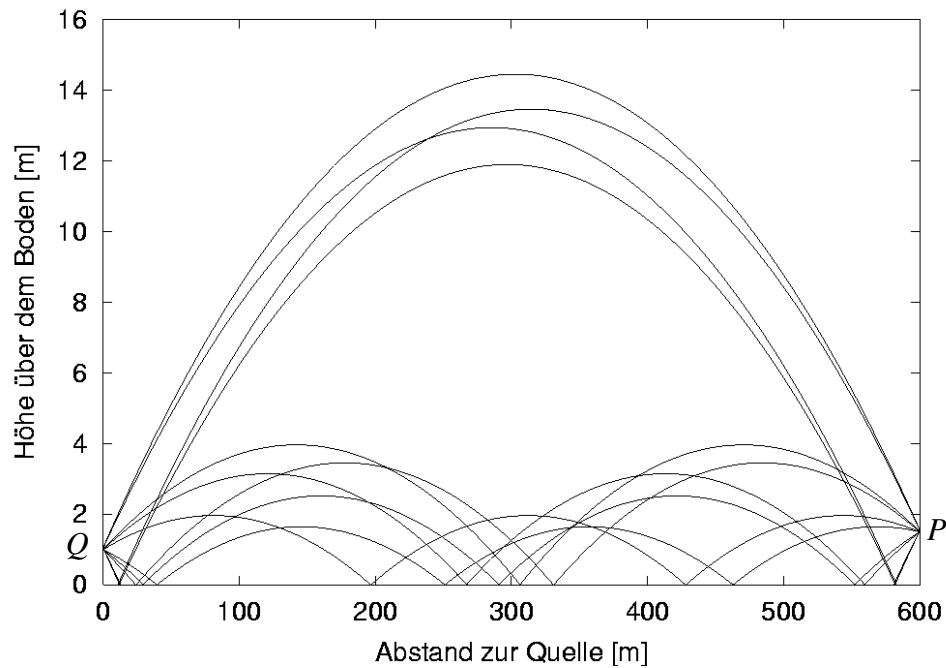


Abbildung 4.3: Schallstrahlenbild mit  $N = 10$  Strahlen für eine Quellhöhe von  $h_Q = 1,5$  m und einen Empfänger bei  $x_P = 600$  m in  $h_P = 2$  m Höhe.

Die Amplitude des Schallstrahls  $m$  berechnet sich als Produkt aus dem sogenannten *Fokussfaktor*  $f_m$  und dem Reflexionsfaktor  $R_m$ , dessen Exponent  $N_m$  die Anzahl der Reflexionen repräsentiert, die der Schallstrahl auf seinem Weg zum Empfänger erfährt. Die Phase wird mit der Kreisfrequenz  $\omega$  aus der Zeit  $t_m$  ermittelt, die der Schallstrahl bis zum Empfänger benötigt.

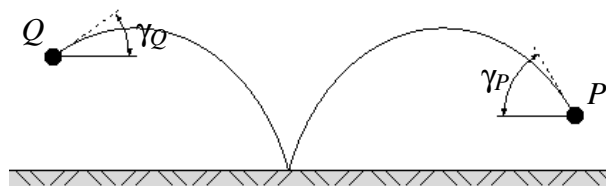


Abbildung 4.4: Steigungswinkel  $\gamma$  des Schallstrahls an der Quelle und am Empfänger.

Der Fokussfaktor, der im hier beschriebenen Modell nach SALOMONS im Wesentlichen die Amplitude  $A_m$  bestimmt, ist ein Maß für die Dichte der Schallstrahlen an einem Ort im Vergleich zur Ausbreitung im homogenen Freifeld. Dazu wird der Abstand  $D$  zweier Strahlen am Empfänger betrachtet, die am Quellpunkt mit einer infinitesimal kleinen Differenz in der Steigung ausgesendet werden. Dieser Abstand am Empfänger wird dann in Relation gesetzt zu dem Ab-

stand  $D_{frei}$ , den diese beiden Strahlen im homogenen Freifeld hätten, d.h. bei Ausbreitung auf geraden Schallstrahlen.

$$f_m = \sqrt{D_{frei}/D}. \quad (4.8)$$

Für die Auswertung der beiden Strahlenabstände  $D$  und  $D_{frei}$  wird ein virtueller Empfängerpunkt  $\hat{P}$  eingeführt, der von  $P$  marginal in horizontaler Richtung verschoben liegt, wie in Abb. 4.5 dargestellt. Der Betrag der Verschiebung beträgt  $\rho_P \Delta x$  mit  $\rho_P \ll 1$ . Bezeichnet man den Steigungswinkel eines Strahls an der Quelle bzw. am Empfänger mit  $\gamma_Q$  bzw.  $\gamma_P$  (siehe Abb. 4.4) und die Differenz der Winkel am realen und virtuellen Empfänger als  $\delta\gamma_Q = \gamma_Q - \hat{\gamma}_Q$ , dann lassen sich die Strahlenabstände  $D$  und  $D_{frei}$  ermitteln zu

$$D = \Delta x \rho_P |\sin \gamma_P|, \quad (4.9a)$$

$$D_{frei} = \frac{(\Delta x)^2 + (z_Q - z_P)^2}{\Delta x} \cos \gamma_Q |\delta\gamma_Q|. \quad (4.9b)$$

Durch Einsetzen in Gl. (4.8) erhält man für den Fokusfaktor

$$f_m = \left( \frac{(\Delta x)^2 + (z_Q - z_P)^2}{(\Delta x)^2} \right)^{1/2} \left( \frac{\cos \gamma_Q |\delta\gamma_Q|}{\rho_P |\sin \gamma_P|} \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

An einem einfachen Beispiel soll dieser Fokusfaktor genauer untersucht und validiert werden. Betrachtet wird dafür die Schallausbreitung im homogenen Medium über schallhartem Boden, für die die analytische Lösung bekannt ist und die als Grenzlösung für ein  $c_{eff}$ -Profil mit  $a, b \rightarrow 0$  betrachtet werden kann. Anhand einfacher geometrischer Überlegungen (siehe Abb. 4.5) kann man alle für Gl. (4.10) benötigten Winkel ermitteln. Den berechneten Fokusfaktor für diesen Fall kann man vergleichen mit der analytischen Lösung, z.B. aus dem Spiegelquellenverfahren: Bei schallharter Reflexion ( $R_m = 1$ ) kann die Reflexionsebene durch eine Spiegelung der Quelle(n) an dieser Ebene ersetzt werden.

Im homogenen Medium erreichen - sofern  $z_Q, z_P > 0$  gilt - genau zwei Strahlen den Empfänger: Der direkte und der einfach reflektierte Strahl. Der Schalldruck ergibt sich mit dem Spiegelquellenverfahren aus der Addition der beiden Anteile zu

$$p = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2}, \quad (4.11)$$

wobei  $r_1$  die Länge des direkten Strahls und  $r_2$  die Länge des reflektierten Strahls bezeichnet (vgl. Abb. 3.1). Aus Gl. (4.5) erhält man für denselben Fall und einer konstanten Quellintensität  $a_Q = 1/r_1$ :

$$p = \frac{1}{r_1} \left( f_1 e^{i\phi_1} + f_2 e^{i\phi_2} \right). \quad (4.12)$$

Es kann überprüft werden, ob diese beiden Ergebnisse übereinstimmen, indem die Fokusfaktoren  $f_1$  und  $f_2$  mit Gl. (4.10) berechnet werden. Für den betrachteten homogenen Fall gilt  $\phi_m = \omega t_m = k r_m$ . Der Fokusfaktor des direkten Strahls ist  $f_1 = 1$ , da es sich bei einem homogenen Medium ohne Reflexion per Definition um den Fall des Freifelds handelt. Es muss also lediglich überprüft werden, ob für den zweiten Fokusfaktor gilt:

$$f_2 = \frac{r_1}{r_2}. \quad (4.13)$$

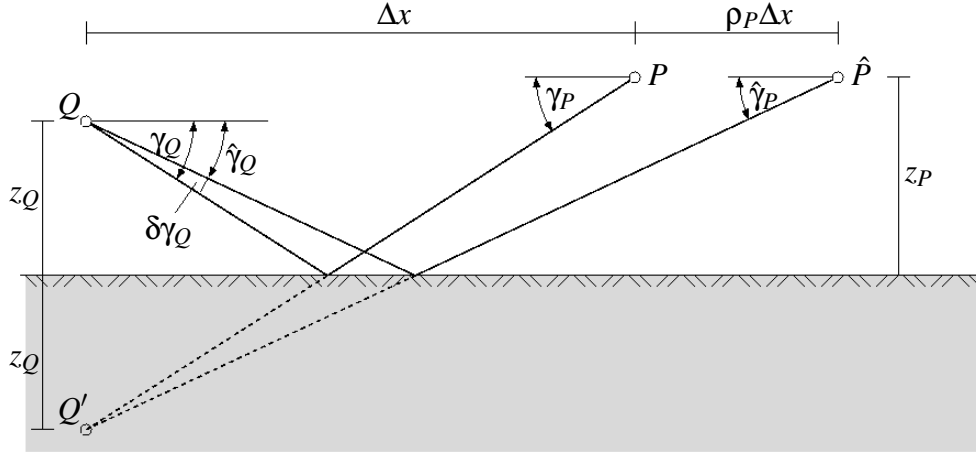


Abbildung 4.5: Schallstrahlengeometrie für ein homogenes Medium.

Mit  $r_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (z_Q - z_P)^2}$  bzw.  $r_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (z_Q + z_P)^2}$  und den Bezeichnungen aus Abb. 4.5 ergibt sich  $f_2$  zu

$$f_2 = \frac{r_1}{\Delta x} \left( \frac{\cos \gamma_Q |\delta \gamma_Q|}{\rho_P |\sin \gamma_P|} \right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

Außerdem lassen sich aus Abb. 4.5 folgende weitere Beziehungen ermitteln:

$$\gamma_Q = \gamma_P, \quad (4.15a)$$

$$\hat{\gamma}_Q = \hat{\gamma}_P, \quad (4.15b)$$

$$\sin \gamma_Q = \frac{z_Q + z_P}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (z_Q + z_P)^2}}, \quad (4.15c)$$

$$\sin \hat{\gamma}_s = \frac{z_Q + z_P}{\sqrt{(\Delta x)^2 (1 + \rho_P)^2 + (z_Q + z_P)^2}}, \quad (4.15d)$$

$$\frac{r_2}{\sin \hat{\gamma}_Q} = \frac{\rho_P P}{\sin \delta \gamma_Q}. \quad (4.15e)$$

Die letzte Beziehung ergibt sich mit Hilfe des Sinussatzes. Gl. (4.14) lässt sich umformen zu

$$f_2 = r_1 \left( \frac{\sin \delta \gamma_Q}{(\Delta x)^2 \rho_P \tan \gamma_P} \right)^{1/2}. \quad (4.16)$$

Ersetzt man  $\sin \delta \gamma_Q$  mit Hilfe von Gl. (4.15e), so wird daraus

$$f_2 = r_1 \left( \frac{\sin \hat{\gamma}_Q}{r_2 (z_Q + z_P)} \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

und durch Einsetzen von Gl. (4.15d) für  $\sin \hat{\gamma}_Q$  erhält man schließlich

$$f_2 = r_1 \left( \frac{1}{r_2 \sqrt{(\Delta x)^2 (1 + \rho_P)^2 + (z_Q + z_P)^2}} \right)^{1/2}. \quad (4.18)$$

Man erkennt, dass dies Gl. (4.13) entspricht, falls  $\rho_P \ll 1$ . Da dies der Annahme für die Position des virtuellen Empfängers entspricht, ist die Plausibilitätsbedingung erfüllt, dass das hier verwendete Strahlenverfahren im Grenzübergang zum homogenen Fall die analytische Lösung liefert. Für die numerische Implementierung erweist sich ein Wert von  $\rho_P = 10^{-5}$  als sinnvoll. Der Fokussfaktor  $f_m$  geht als maßgeblicher Faktor in die Amplitude  $A_m$  ein und ist somit Teil der rein geometrischen Lösung. Es lassen sich geometrische Orte bestimmen, an denen der Fokussfaktor divergiert. Dies ist dort der Fall, wo sich zwei Strahlen gerade schneiden, die im Quellpunkt infinitesimal unterschiedliche Steigungswinkel  $\gamma_Q$  besitzen. Wenn sie sich schneiden, wird der Abstand  $D$  zu null und der Fokussfaktor nach seiner Definition aus Gl. (4.8) unendlich groß. Die Lage dieser Polstellen nimmt charakteristische Formen an, was in Abb. 4.6 deutlich wird. Bei diesen geometrischen Formen spricht man von *Kaustiken*. Diese werden im Folgenden genauer erläutert.

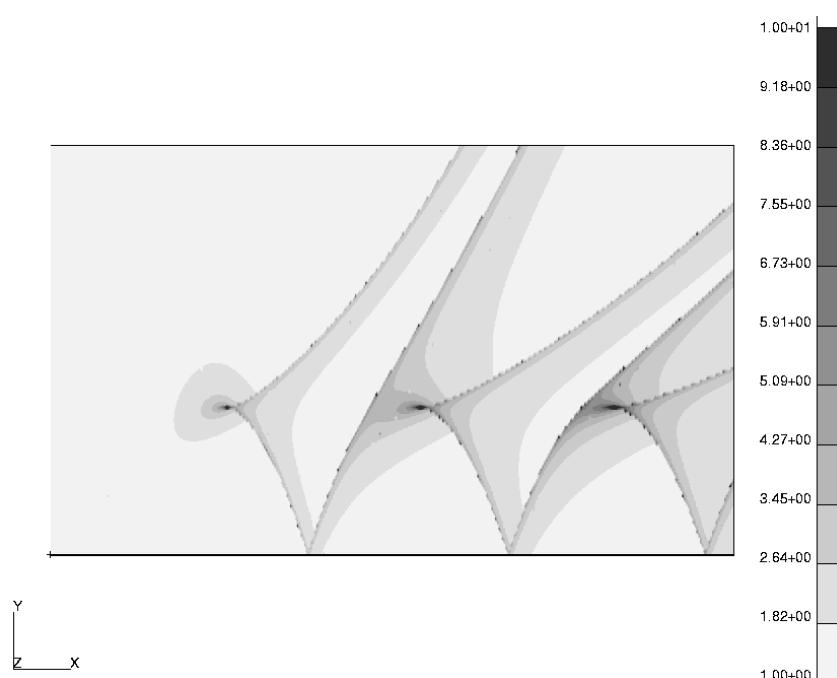


Abbildung 4.6: Fokussfaktor  $f_m$  in einem überhöht dargestellten Empfängerausschnitt (ca.  $5\text{ m} \times 300\text{ m}$ ).

### 4.2.2 Kaustische Beugungsfelder

Treten bei der Berechnung mit geometrischen Verfahren entweder gekrümmte Schallstrahlen oder gekrümmte Reflexionsflächen auf, dann können Kaustiken entstehen. Sie beschreiben geometrische Orte, an denen Strahlen durch Reflexion und Refraktion gebündelt werden. Es handelt sich also um Brennpunkte, -linien oder -flächen, wie sie v.a. aus der Optik bekannt sind. Die Kaustiken nehmen für Schallgeschwindigkeitsprofile mit positiven Gradienten charakteristische Formen an, die in Abbildung 4.7 dargestellt sind.

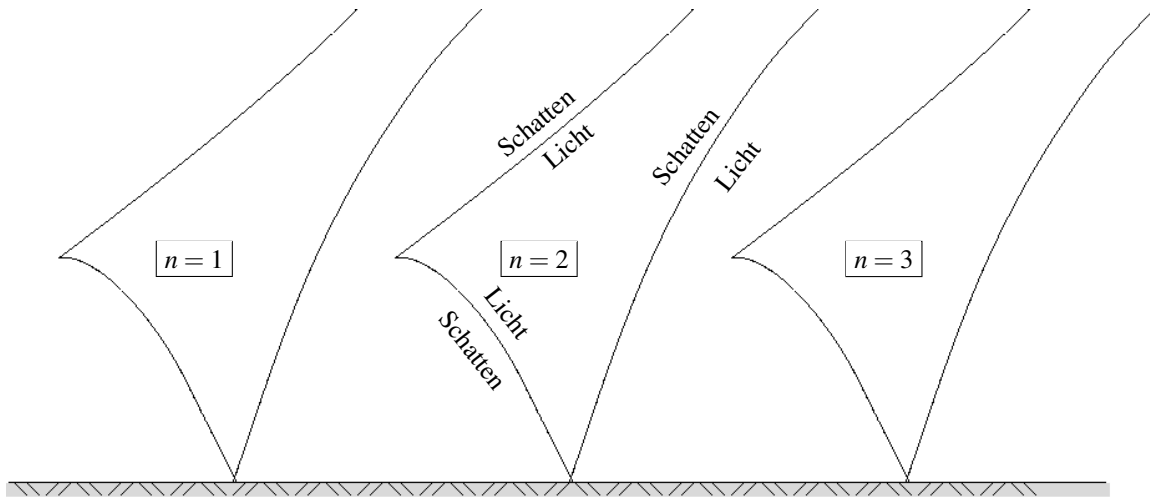


Abbildung 4.7: Charakteristische Form von Kaustiken mit Schatten- und Lichtzonen.

Ermittelt man den Schalldruck nach der Theorie der rein geometrischen Akustik, so ergeben sich an diesen Stellen unendliche Werte. In der Realität werden entlang der Kaustiken zwar oft erhöhte, aber dennoch endliche Schalldrücke gemessen. Das Schalldruckfeld weist in einem realen Fluid keine Sprünge oder Unendlichkeitsstellen auf, da Beugungseffekte dies verhindern. Die Differenz zwischen diesem realen, endlichen Schalldruckfeld und dem Schalldruckfeld mit unendlichen Werten an den Polstellen, wie es sich aus der rein geometrischen Akustik ergibt, ist das sog. *kaustische Beugungsfeld*. Da die Beugung nur mit Hilfe der Wellentheorie abgebildet werden kann, das Strahlenmodell aber den Wellencharakter bei der Schallausbreitung gerade vernachlässigt, müssen die Beugungsfelder explizit berechnet und als Korrekturterme auf die geometrische Lösung aufaddiert werden.

Das Schalldruckfeld wird zur Berechnung der realen Schalldruckverteilung in eine „Schatten-seite“ und eine „Lichtseite“ bezüglich einer Kaustik geteilt (siehe Abb.4.7). Diese Begriffe verdeutlichen die starke Anlehnung an die Optik. Jeder Punkt auf der Lichtseite wird - verglichen mit einem Punkt auf der Schattenseite - durch zwei zusätzliche Schallstrahlen erreicht (vgl. Abb. 4.8). Lässt man den Empfängerpunkt also horizontal immer weiter von der Quelle weg wandern, so erhöht sich bei jedem Überschreiten einer Kaustik die Anzahl  $M$  um zwei neue Strahlen, die zusammen ein kaustisches Strahlenpaar bilden. Diese beiden Strahlen schneiden sich gerade auf der Kaustik. Der Fokussfaktor in Gleichung (4.6) wird daher unendlich groß und somit auch der aus allen  $M$  Strahlen zusammengesetzte Gesamtschalldruck  $p_{geom}$  in Gleichung (4.5).

Die Anteile dieses zusätzlichen kaustischen Strahlenpaares werden in Gl.(4.5) ersetzt durch einen modifizierten Term für die Lichtseite der Kaustik, das kaustische Beugungsfeld:

$$p(x) = \sqrt{2\pi} k^{1/6} e^{i\pi/4} e^{ik\theta} [g_0 \text{Ai}(-k^{2/3}\rho) + i k^{-1/3} g_1 \text{Ai}'(-k^{2/3}\rho)] \quad (4.19)$$

mit der AIRY-Funktion  $\text{Ai}$  bzw. deren Ableitung  $\text{Ai}'$ . Die Herleitung dieser kaustischen Beugungsfelder sowie die Bestimmung der dafür notwendigen Hilfsgrößen  $\theta$ ,  $g_0$ ,  $g_1$  und  $\rho$  wird in





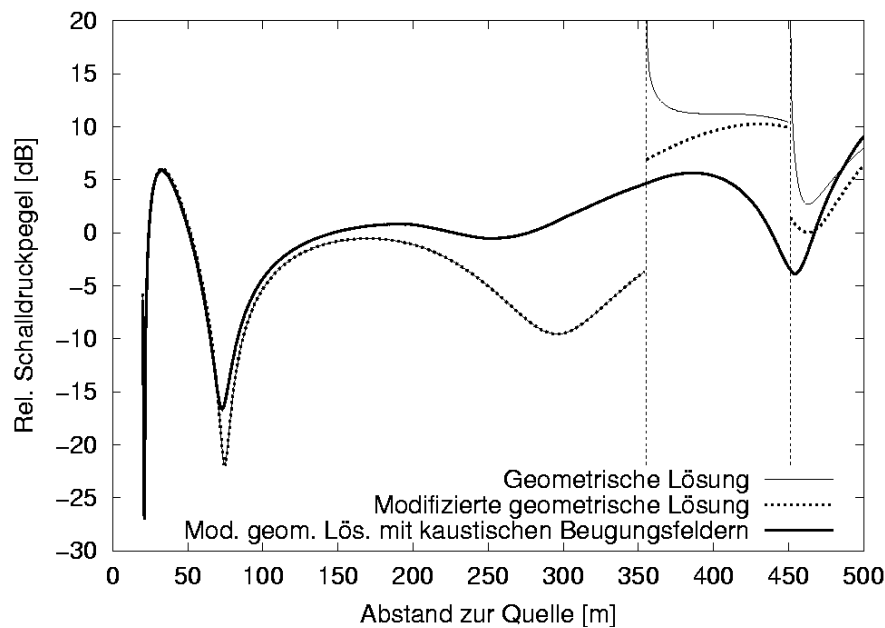


Abbildung 4.9: Vergleich der verschiedenen Lösungsstufen für  $a = 0,1 \frac{1}{s}$  mit zwei Kaustiken bei  $x = 355,45 m$  und  $x = 451,32 m$ .

### 4.2.3 Beispiel

Als Beispiel ist in Abb. 4.10 dieselbe Situation wie in Abb. 4.9 betrachtet, mit einer Quelle in  $z_Q = 1,8 m$  über dem Boden. Der Schalldruck wird in einer Höhe von  $z_P = 3 m$  in einer horizontalen Entfernung von bis zu  $500 m$  von der Quelle entfernt berechnet. Dabei werden unterschiedliche Schallgeschwindigkeitsprofile bei der Berechnung berücksichtigt. Der Gradient des linearen Profils wird variiert von  $a = 0,05 \frac{1}{s}$  bis  $a = 0,2 \frac{1}{s}$ . Als Vergleich ist die mit der Randelementmethode berechnete Lösung für ein homogenes Medium ( $a = 0$ ) abgebildet. Es wird ersichtlich, dass sich die Kurven mit Refraktion für kleiner werdende Gradienten  $a$  an die Referenzlösung für die homogene Atmosphäre annähern.

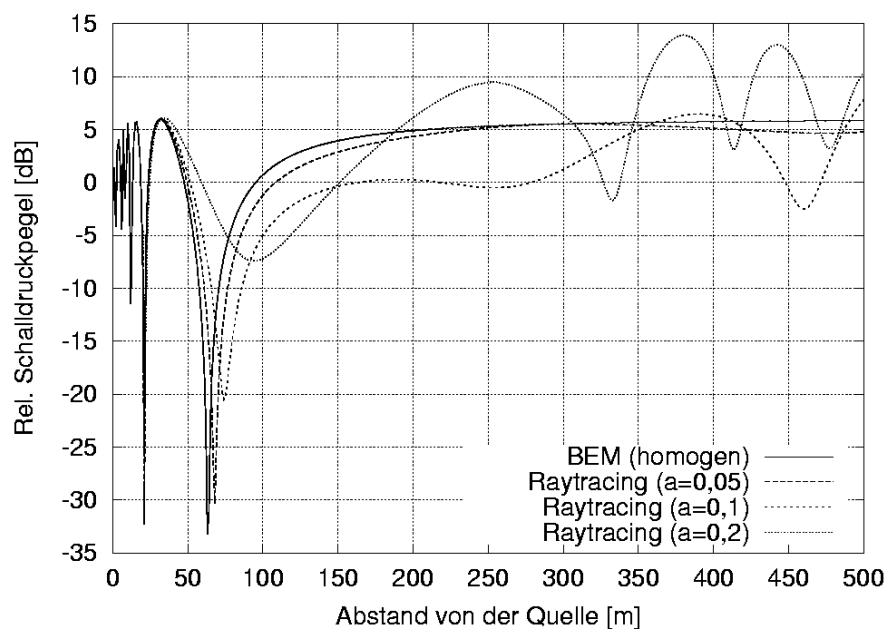


Abbildung 4.10: Vergleich des relativen Schalldruckpegels bei unterschiedlich starker Refraktion von  $a = 0$  (homogen) bis  $a = 0,2 \frac{1}{s}$ .



# Kapitel 5

## Kopplung von BEM und Strahlenverfahren

Entscheidend für die Wahl bzw. Entwicklung einer Kopplungsmethode sind in erster Linie die Berechnungsverfahren, mit denen die angrenzenden Rechengebiete gelöst werden sollen. Auch die Art des zu lösenden Problems (z.B. die Geometrie) kann gewisse Anforderungen an die Kopplungsmethode stellen. In Abschnitt 5.1 werden zunächst die üblichen Kopplungsarten mit ihren Gemeinsamkeiten und Unterschieden dargelegt. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 speziell auf die Anforderungen und Besonderheiten bei einer Kopplung von Randelementmethode und Strahlenverfahren eingegangen. In den Abschnitten 5.3 und 5.4 werden schließlich zwei alternative Methoden zur Kopplung dieser beiden Verfahren vorgestellt.

### 5.1 Allgemeine Arten der Kopplung

Unabhängig von den verwendeten Berechnungsmethoden können bei der Kopplung zweier oder mehrerer Rechengebiete grundsätzlich zwei Arten unterschieden werden: Die *strenge* und die *schwache* Kopplung. Für beide Arten der Kopplung ist in jedem Rechengebiet eine ggf. unterschiedliche Differenzialgleichung zu lösen. Werden zwei Diskretisierungsverfahren gekoppelt, z.B. FEM-FEM, FEM-BEM oder BEM-BEM, dann haben die zu koppelnden Teilgebiete in der Regel einen gemeinsamen diskretisierten Rand - im Folgenden auch als *Interface* bezeichnet. Entlang dieses Interfaces werden Übergangsbedingungen formuliert, die mathematisch erst die Verbindung zwischen den Teilgebieten herstellen. Üblicherweise wird durch die Übergangsbedingungen gefordert, dass die führende Feldgröße - in der Akustik meist der Druck - stetig ist und der Fluss als die Normalenableitung dieser Feldgröße auf beiden Seiten des Interfaces den gleichen Betrag, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen, besitzt. Das Vorgehen zur Berechnung einer Lösung unterscheidet dann zwischen strenger und schwacher Kopplung.

Eine strenge Kopplung kann auf zwei Arten erreicht werden: Einerseits dadurch, dass die Gleichungssysteme der beiden Teilgebiete zusammen mit den Übergangsbedingungen in *ein* Gesamtgleichungssystem zusammengefügt werden (siehe auch Substrukturtechnik in Abschnitt 3.3). Dieses Vorgehen wird als *direkte* Kopplung bezeichnet. Bei der *indirekten* oder *iterativen*

Kopplung andererseits wird für jedes Teilgebiet getrennt jeweils ein Gleichungssystem aufgestellt. Diese Gleichungssysteme werden dann einzeln gelöst, wobei sich die Randbedingung für das eine Teilgebiet jeweils aus der Lösung des angrenzenden Teilgebiets ergibt. Dies wird iterativ solange durchgeführt, bis die Ergebnisse aus beiden Teilgebieten am Interface die geforderten Übergangsbedingungen bis auf eine vorgegebene Toleranz erfüllen.

Die schwache Kopplung stellt in sofern eine Vereinfachung der strengen Kopplung dar, als der beschriebene Algorithmus der iterativen Kopplung nur einmal durchgeführt wird. Die Lösung aus dem einen Teilgebiet wird als Randbedingung für die Berechnung im anderen Teilgebiet verwendet, um dort eine Lösung zu erhalten. Die schwache Kopplung ist eine gerichtete Kopplung. Durch das Rechenverfahren kann nur das zuerst berechnete Gebiet Auswirkungen auf das zweite Gebiet haben, nicht jedoch umgekehrt. Dies setzt voraus, dass auch physikalisch zwischen den Gebieten keine nennenswerten Interaktionen bzw. Rückwirkungen auftreten. Diese Bedingung muss für die jeweils betrachtete Aufgabenstellung gewährleistet sein.

## 5.2 Spezielle Kopplung von BEM und Strahlenverfahren

In der Einleitung wird bereits die Motivation für die in diesem Kapitel beschriebene Kopplung von BEM und Strahlenverfahren gegeben. Gegenstand der Betrachtung sind Probleme der Schallausbreitung im Freien, wie sie in Abb. 5.1 dargestellt sind. Wichtig ist in allen drei dort abgebildeten Beispielen die Unterscheidung zwischen Nahfeld und Fernfeld der Primärquelle. Das Nahfeld ist ein im Vergleich zum gesamten betrachteten Gebiet relativ kleiner Bereich. Er umfasst außer der Primärquelle - also der im physikalischen Problem vorhandenen Lärmquelle, deren Auswirkung es zu untersuchen gilt - auch Hindernisse, die sich in unmittelbarer Umgebung befinden und die Schallausbreitung somit wesentlich beeinflussen. Gesucht ist in diesen Problemen das resultierende Schallfeld an Punkten im Fernfeld. In der Praxis kann es sich hierbei um Wohngebiete oder andere lärmempfindliche Orte handeln, an die im Berechnungsmodell sogenannte Empfänger gesetzt werden. Im Vergleich zu den Abmessungen des Nahfelds (einige Meter bis ca. 30 m) befinden sich für diese Problemstellung die Empfängerpunkte, an denen der Schalldruck gesucht wird, in großer Entfernung (ca. 100 bis 1000 m). Die große Entfernung soll in Abb. 5.1 durch den gestrichelten Boden verdeutlicht werden.

Da meteorologische Einflüsse - wie sie in der gekoppelten Rechnung berücksichtigt werden können - sich erst über größere Distanzen merklich auswirken, liegt das interessierende Gebiet bei den hier dargestellten Problemen im Fernfeld. Diese meteorologischen Einflüsse wie Refraktion infolge Temperatur- bzw. Windprofil können in einem Strahlenmodell erfasst werden, welches zur Berechnung des Fernfeldes eingesetzt wird. Das Nahfeld, in dem bedingt durch die komplexe Geometrie um die Primärquelle Beugung und Mehrfachreflexionen auftreten, wird mit Hilfe der Randelementmethode berechnet, die diese Effekte implizit berücksichtigt.

Bei der hier beabsichtigten Kopplung von Randelementmethode und Raytracingverfahren ergibt sich die Wahl der Kopplungsart aus den Eigenschaften der beiden zu koppelnden Berechnungsverfahren. Dazu sollen in diesem Abschnitt noch einmal die bei der Kopplung bedeutenden Eigenschaften der beiden Verfahren zusammengefasst und Anforderungen an die Kopplungsmethode abgeleitet werden. Im vorliegenden Fall spielen der Gebietsrand sowie die jeweiligen

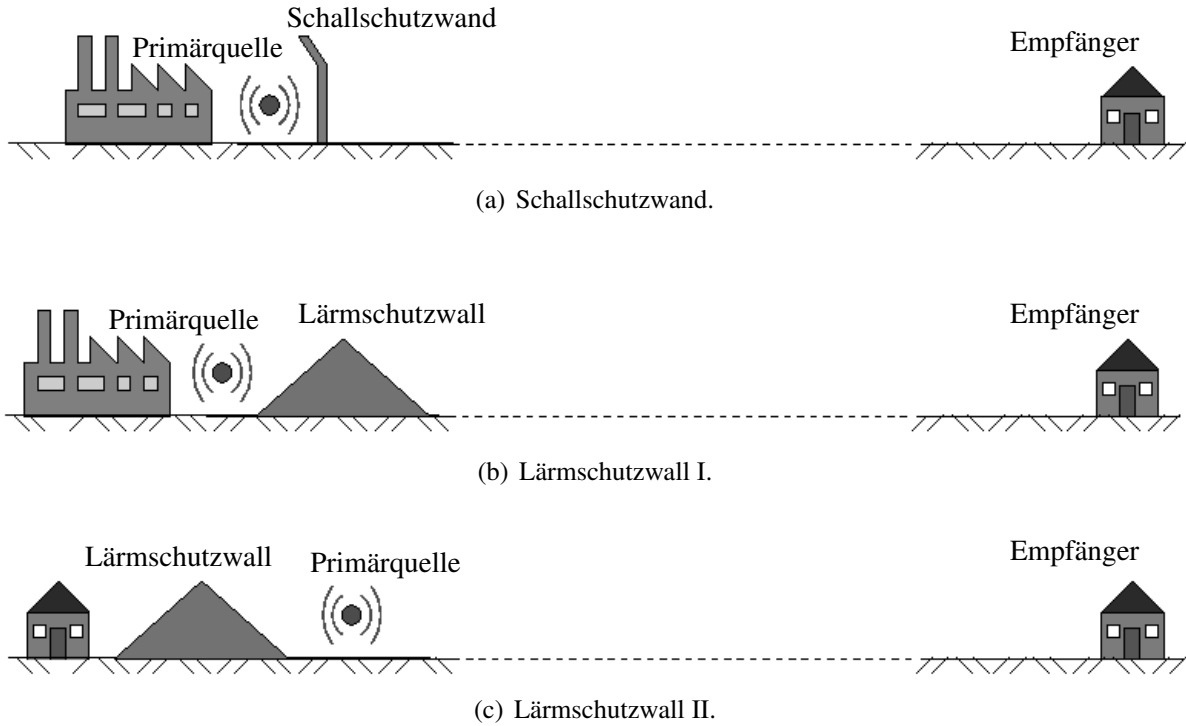


Abbildung 5.1: Typische Problemstellungen bei der Schallausbreitung im Freien.

Eingangs- bzw. Ausgangsdaten eine Rolle.

Bei der Randelementmethode ist für das zu lösende Problem kein Rand als Abgrenzung des Rechengebiets zu diskretisieren. In der für Schallausbreitung im Freien stets verwendeten Form des Außenraumproblems bzw. unendlichen Halbraums befindet sich dieser Teil des Randes im Unendlichen und muss nicht diskretisiert werden, da die SOMMERFELDSche Abstrahlbedingung dort implizit erfüllt ist (siehe Kapitel 3). Als Ausgangsdaten aus der BEM-Rechnung gehen Druck- oder Flussverteilungen hervor. Den Druck bzw. Fluß auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  erhält man aus der Lösung des Gleichungssystems. Der Schalldruck im Innern des Gebiets  $\Omega$  wird bei der Randelementmethode in einer sog. *Innenpunktauswertung* als Nachlaufrechnung ermittelt (siehe Abschnitt 3.1). Mit den bereits bekannten Größen Druck und Fluß auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  kann man für jeden Punkt  $\xi_i$  im Gebiet die Randintegralgleichung lösen:

$$p(\xi_i) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \xi_i) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi_i)}{\partial n} p(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \xi_i \in \Omega. \quad (5.1)$$

Das Strahlenverfahren ist kein Diskretisierungsverfahren, welches einen Gebietsrand und dort vorgeschriebene Randbedingungen als Eingabedaten benötigt. Der betrachtete Halbraum ist nach oben und zu den Seiten offen, nur der Boden ist durch eine unendliche Ebene vorgegeben, muss jedoch nicht diskretisiert werden. Als Eingangsdaten einer Raytracingberechnung dienen Quellen. Das implementierte Strahlenmodell nach SALOMONS benötigt Punktquellen als Ein-

gabedaten, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben. Werden als Anregung mehrere Punktquellen angesetzt, so kann der Gesamtschalldruck durch Überlagerung der komplexen Einzeldruckfelder aller Quellen ermittelt werden.

Für eine Kopplung der beiden Verfahren müssen Lage und Intensität von sekundären Punktquellen bestimmt werden. Als sekundäre Punktquellen werden hier solche Quellen bezeichnet, die nicht wie Primärquellen Teil des physikalischen Ausgangsproblems sind, sondern lediglich als Hilfsquellen bei der Berechnung dienen (siehe Abb. 5.3). Diese Sekundärquellen müssen die Auswirkungen aus dem zuerst berechneten Teilgebiet ausreichend beschreiben bzw. diese äquivalent ersetzen.

Es existiert also keine definierte Grenzfläche zwischen den beiden Rechengebieten, sondern sie können als zwei sich überlappende Gebiete betrachtet werden. Entscheidend für eine Kopplung der beiden Verfahren ist darüber hinaus, dass das Strahlenverfahren als Eingangsdaten Punktquellen und deren Quellintensität benötigt, aus der BEM-Rechnung jedoch nur Druck- oder Flussverteilungen vorliegen. Umgekehrt formuliert muss das gesuchte Kopplungsverfahren in der Lage sein, aus einer gegebenen Druckverteilung äquivalente Punktquellen zu ermitteln. Im vorliegenden Fall muss eine Kopplung in schwacher Form erfolgen. Das implementierte Strahlenverfahren stellt ein gerichtetes Verfahren dar, welches das Druckfeld am Empfänger infolge von Punktquellen ermittelt, jedoch keine Rückwirkung auf das Quellgebiet selbst erfasst. Für eine strenge iterative Kopplung müsste jedoch diese Rückwirkung in Form einer Druckverteilung im Quellgebiet bekannt sein, um diese Druckverteilung wieder als Randbedingung für das BEM-Gebiet aufzubringen. Da also in der Berechnung keine Wechselwirkung zwischen den Gebieten möglich ist, muss gewährleistet sein, dass auch physikalisch keine nennenswerten Rückwirkungen auftreten. Diese Bedingung wird für die behandelten Beispiele geprüft und verifiziert. Dies geschieht mit Hilfe eines Vergleichs mit einer exakten Lösung. In den folgenden Abschnitten werden zwei Methoden vorgestellt, die aus den BEM-Ergebnissen in Form von Schalldruck die benötigten Punktquellen für das Strahlenverfahren berechnet.

### 5.3 Kopplung mit der indirekten Randelementmethode

Wie einleitend beschrieben existiert keine vorgegebene Grenze zwischen BEM- und Raytracing-Gebiet. Es kann jedoch ein (virtuelles) Interface definiert werden, an dem die Umrechnung der Druckverteilung aus der BEM-Rechnung in äquivalente Punktquellen für die Raytracing-Rechnung erfolgt (siehe Abb. 5.2). Die günstige Wahl von Ort und Form dieser künstlichen Schnittstelle, welche das Randelementgebiet vom Raytracinggebiet trennt bzw. es mit diesem verbindet, wird in diesem Abschnitt diskutiert. Für die BEM-Rechnung wird dieses Interface als Elementnetz bestehend aus Innenpunkten diskretisiert, so dass die Nachlaufrechnung den Druck an jedem Knoten des Interfaces liefert. Aus der zugehörigen Elementtopologie und den zur Diskretisierung gewählten Ansatzfunktionen ist somit die Druckverteilung auf dem gesamten Interface bekannt.

Die Antwort auf die Frage, wie Ort und Form des Interfaces zu wählen sind, kann durch das Verfahren vorgegeben sein, welches an das BEM-Modell gekoppelt werden soll. Dazu seien die beiden in Abbildung 5.3 dargestellten Formen des Interfaces verglichen: Eine geschlossene



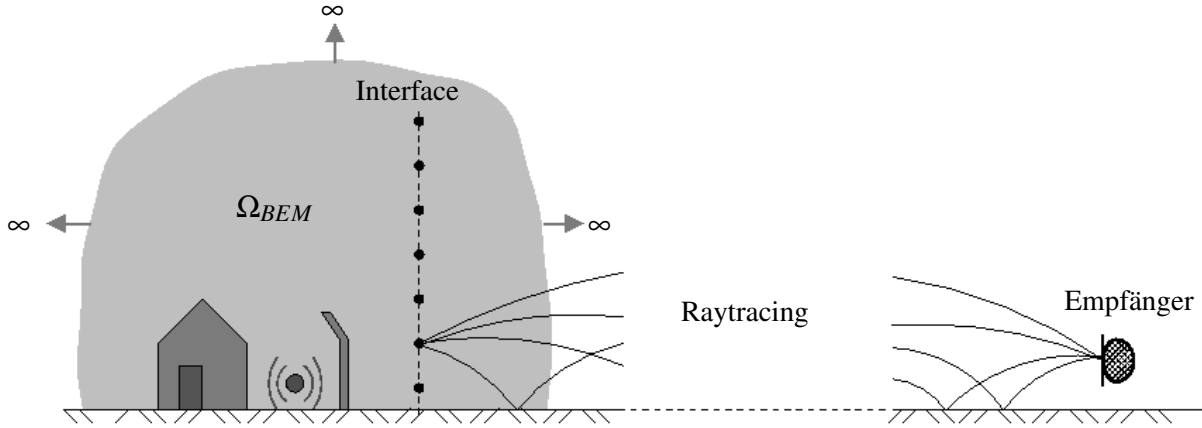


Abbildung 5.2: Anordnung der Berechnungsgebiete und der Kopplung am virtuellen Interface.

Halbkugel um das Nahfeld - bestehend aus Primärquelle und Hindernis - (Abb 5.3(a)) sowie eine vertikale Ebene, die zwischen Nahfeld und Empfänger platziert wird (Abb 5.3(b)). An diesem Beispiel soll verdeutlicht werden, inwiefern die Eigenschaften der verwendeten Methoden sich auf die Modellierung des Interfaces auswirken. So ist bei Verwendung des Strahlenverfahrens ein Interface wie in Abb 5.3(a) aus folgendem Grund nicht geeignet: Die erforderliche Kopplungsmethode liefert auf dem Interface Sekundärquellen als Eingabedaten für das Strahlenverfahren. Liegt zwischen einer Sekundärquelle und dem Empfänger jedoch ein Hindernis (wie es in Abb 5.3(a) für viele Sekundärquellen der Fall ist), welches einen signifikanten Einfluss bei der Schallausbreitung zum Empfänger hat, so müsste dieses Hindernis auch bei der Raytracing-Berechnung wieder berücksichtigt werden. Eine solche Berücksichtigung von Hindernissen - und damit von Beugung und Reflexionen - stellt aber gerade die Schwäche von Verfahren der geometrischen Akustik dar. Insofern ist die Lage des Interfaces so zu wählen, dass ein signifikanter Einfluss von Hindernissen auf die Schallausbreitung zwischen den äquivalenten Sekundärquellen und dem Empfänger ausgeschlossen werden kann. Daher wird für das Interface im Weiteren eine Form wie in Abb 5.3(b) verwendet.

Um sich ein künstliches Interface zu schaffen, an dem die Kopplung zum Raytracingverfahren stattfinden soll, diskretisiert man die gewählte Fläche (bzw. in 2D die Linie) wie den eigentlichen Gebietsrand bei der BEM in Elemente und Knoten. An diesen Knoten wird Gl. (5.1) ausgewertet. Die so berechneten diskreten Werte für den komplexen Druck stellen in Verbindung mit Ansatzfunktionen auf den Interfaceelementen eine kontinuierliche Druckverteilung über das gesamte Interface auf.

Zur Umrechnung von einer Druckverteilung in eine Quellverteilung kann man sich der indirekten Randelementmethode bedienen. Aus der Randintegralgleichung [3]

$$\int_{\Gamma'} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) a^*(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} = \bar{p}(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

mit bekanntem Druck  $\bar{p}$  und gesuchter Quellintensität  $a^*$  auf dem Interface  $\Gamma'$  wird in diskreter Form ein Gleichungssystem, aus dem die Quellintensitätsverteilung berechnet wird. Schließlich

wird die Quellintensität über jedes Element integriert und dieses durch eine äquivalente Punktquelle ersetzt, wie in Abb. 5.4 schematisch dargestellt. Die Punktquelle wird dabei in die Mitte des Elements gelegt. Die Quellintensität ist im Frequenzbereich ebenfalls komplex analog zum komplexen Schalldruck.

### 5.3.1 Verifikation

Es wird in diesem Abschnitt die Kopplungsmethode als zentraler Teil der gesamten hybriden Methode aus BEM und Raytracing verifiziert. Die Verifikation wird am Beispiel eines homogenen Halbraums mit schallhartem Boden durchgeführt. Dies hat den Vorteil, dass dieses Problem zur Ermittlung einer Referenzlösung auch ohne Kopplung in *einem* Rechenschritt mit der Randelementmethode gerechnet werden kann. Abgesehen von sehr geringen Diskretisierungsfehlern liefert die Randelementmethode für diesen Fall die exakte Lösung und wird daher hier zum Vergleich mit der Lösung aus einer gekoppelten Berechnung herangezogen.

Um die Kopplungsmethode aus dem Gesamtmodell herausgelöst verifizieren zu können, werden die mit der Referenzlösung zu vergleichenden Ergebnisse mit folgendem Drei-Schritt-Verfahren ermittelt:

1. Die Direkte BEM mit der Primärquelle liefert die Druckverteilung entlang eines virtuellen Interfaces, welches als Netz von Innenpunkten modelliert wird.
2. Die Druckverteilung wird mit Gl. (5.2) in äquivalente Punktquellen umgerechnet.
3. Diese werden als Eingabedaten für den dritten Berechnungsschritt mit der direkten BEM verwendet.

Für die eigentliche hybride Berechnung (BEM-Raytracing) wird im dritten Berechnungsschritt nicht die direkte BEM verwendet, sondern das Strahlenverfahren, welches auch zusätzliche meteorologische Effekte berücksichtigt. Die Vorgabe von Punktquellen - was für den dritten Berechnungsschritt der Referenzlösung nötig ist - ist mit der Randelementmethode kein Problem (siehe hierzu Kapitel 3). Es ergibt sich dadurch lediglich ein weiterer „Lastterm“ auf der rechten Seite des Gleichungssystems  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}$ .

Ein Vergleich der Ergebnisse aus der angegebenen Drei-Schritt-Berechnung mit der Referenzlösung liefert den Fehler der Kopplungsmethode, der sich aus mehreren Anteilen zusammensetzt: Der Fehler bei der Ermittlung der Druckverteilung am Interfaceknoten entsteht bei der Diskretisierung evtl. vorhandener Hindernisse im ersten Berechnungsschritt, da die Ansatzfunktionen generell den Verlauf der Größen zwischen den Knoten nur approximieren. Dieser ist jedoch sehr gering und überdies auch in der Referenzlösung enthalten. Dazu kommt der Fehler, der bei der Umrechnung am Interface von Druckverteilung in Quellintensitäten dadurch entsteht, dass das gewählte Interface diskretisiert werden muss (Approximation durch Ansatzfunktionen) und dass die kontinuierliche Quellintensitätsverteilung dann in diskreten Punktquellen konzentriert wird. Der quantitativ größte Fehleranteil ist jedoch auf den Diskretisierungsabbruch bei der Wahl eines Interfaces zurückzuführen. Um diesen Fehler zu vermeiden, müsste das Interface die Primärquelle samt allen Hindernissen mit einer geschlossenen Fläche umgeben, z.B. eine

Halbkugel wie in Abb. 5.3. Da dies für eine Kopplung mit Raytracingverfahren nicht möglich ist, müsste das Interface eine unendlich ausgedehnte Ebene sein. Die erforderliche Größe des diskretisierten Interfaces spielt in der Fehleranalyse eine entscheidende Rolle.

Die Fehleranalyse wird sowohl an 2D- als auch an 3D-Beispielen durchgeführt. Der relative Fehler  $E_{rel}$  ist hier definiert als die Differenz der Schalldruckamplituden zwischen der Lösung aus der gekoppelten Rechnung und der exakten Lösung, bezogen auf die exakte Lösung:

$$E_{rel} = \frac{|p_{Kopplung}| - |p_{exakt}|}{|p_{exakt}|}. \quad (5.3)$$

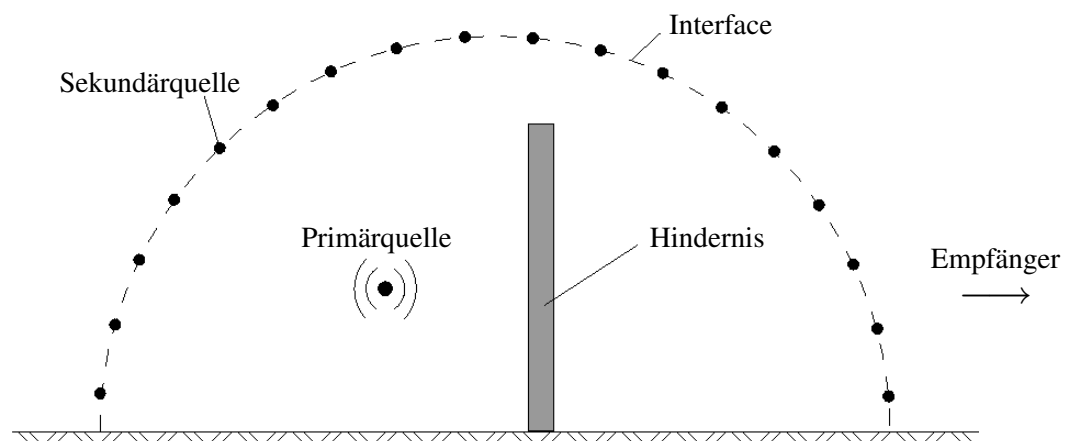
Der Fehler ist u.a. abhängig von der gewählten Diskretisierung des Interfaces, der Ausdehnung des Interfaces und über den Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge auch von der Anregungsfrequenz. In Abbildung 5.5 ist der Verlauf des relativen Fehlers über die horizontale Ausbreitungsstanz dargestellt. Das berechnete 2D-Problem ist ein homogener Halbraum mit einer Primärquelle über schallhartem Boden und einer Schallschutzmauer der Höhe  $h_S$  nahe der Quelle. Der Fehler des berechneten Druckamplitude hinter der Mauer ist aufgetragen bis zu einer Distanz von  $x = 1000m$ . Die drei Kurven repräsentieren dabei unterschiedliche Diskretisierungshöhen  $h^I$  des Interfaces. Die Höhen sind normiert angegeben, bezogen auf die Höhe der Mauer. Für steigende Interfacehöhen kann eine deutlich Reduzierung des Fehlers beobachtet werden. Diese Eigenschaft ist von zentraler Bedeutung zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers bei Verwendung der Kopplungsmethode. Sie zeigt, dass das vorgestellte Kopplungsverfahren funktioniert und für den beabsichtigten Einsatz geeignet ist. Für das dargestellte 2D-Beispiel reduziert sich der relative Fehler für das größte verwendete Interface auf wenige Promille.

Abb. 5.6 zeigt Ergebnisse für ein 3D-Beispiel mit einer Schallschutzmauer ( $h_S = 4m, b_S = 10m$ ) und einer Punktquelle ( $f = 100Hz$ ) in der Höhe  $h_Q = 2m$  im Abstand von  $d_Q = 2m$  vor der Mauer. Dabei werden zwei Größen für das Interface und zwei mögliche Diskretisierungsfeinheiten berücksichtigt: Ein kleineres Interface mit gröberer Diskretisierung (in Abb. 5.6 mit 'klein, grob' bezeichnet), ein kleineres Interface mit feinerer Diskretisierung ('klein, fein') und schließlich ein größeres Interface mit der gröberen Diskretisierung ('groß, grob'). Bei der gröberen Diskretisierung beträgt die Kantenlänge eines Elements  $d_{max} = 0,4m$ , das feinere Netz besteht aus Elementen mit Kantenlänge  $d_{max} = 0,2m$ . Das kleinere Interface hat eine Länge von  $L = 30m$  und eine Höhe von  $H = 20m$ , während das größere  $L = 60m$  lang und  $H = 40m$  hoch ist.

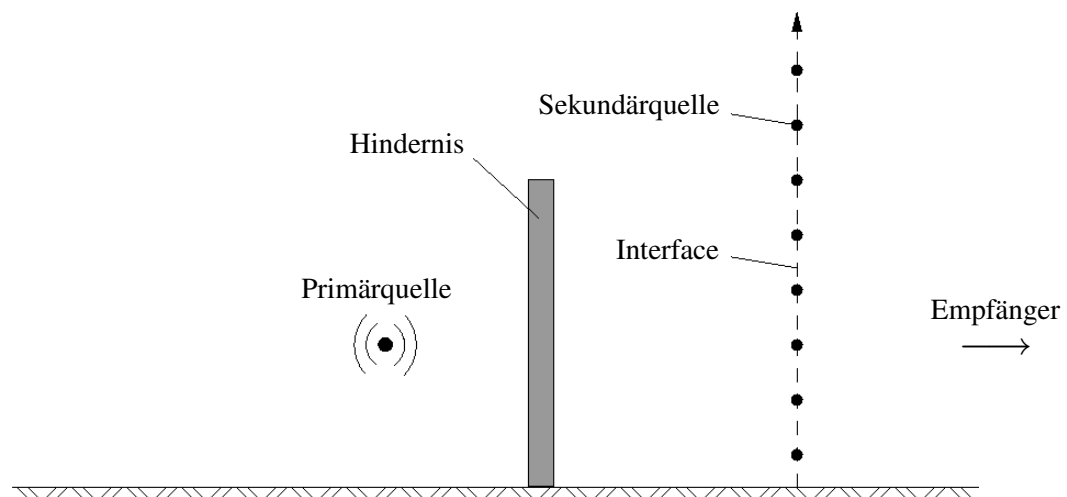
Ziel der Analyse dieser Parametervariationen ist es, die Größe und Form des Interfaces so zu wählen, dass das Verhältnis zwischen Aufwand (Anzahl der Knoten und Elemente) und dem relativen Fehler aus der jeweiligen Konfiguration optimiert werden kann. Ausgehend von der Konfiguration mit grober Diskretisierung und kleineren Abmessungen des Interfaces soll hier die durch eine Aufwandserhöhung zu erwartende Fehlerreduzierung abgeschätzt werden. Die Aufwandserhöhung wird einmal durch Verfeinerung der Diskretisierung (Halbierung der Elementlänge) und alternativ durch die Verdopplung der Länge und Breite durchgeführt, also mit demselben Mehraufwand für die beiden Varianten. Der Vergleich der relativen Fehler zeigt, dass die feinere Diskretisierung gegenüber der Ausgangskonfiguration praktisch keine Verbesserung des Ergebnisses bringt trotz einer Vervierfachung der Elemente und Knoten. Eine Vergrößerung

der Interfaceausdehnung liefert bei derselben Aufwandserhöhung die deutlich bessere Lösung. Abb. 5.7 zeigt den Vergleich einer Drei-Schritt-Berechnung mit der exakten Lösung. Die Diskretisierung des Interfaces ist für das gerechnete Beispiel zu grob, die Kopplungsmethode zeigt starke Oszillationen um die exakte Lösung.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass durch eine Verfeinerung der Diskretisierung über die  $\lambda/6$ -Faustregel (mindestens sechs Elemente pro Wellenlänge  $\lambda$ ) hinaus keine nennenswerte Fehlerreduzierung erzielt werden kann, dass aber andererseits die Abmessungen des Interfaces eine große Rolle spielen.



(a) Virtuelles Interface als Halbkreis bzw. -kugel um das Nahfeld.



(b) Virtuelles Interface als vertikale Ebene zwischen Nahfeld und Empfänger.

Abbildung 5.3: Verschiedene Formen des virtuellen Interfaces.

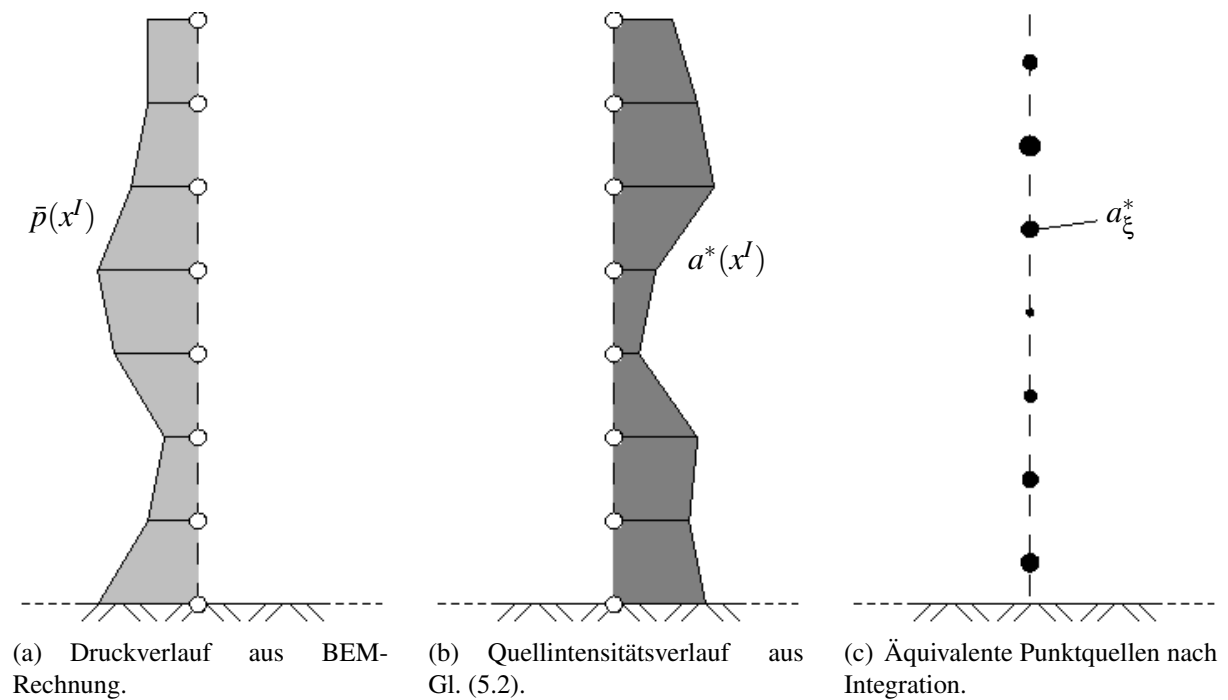


Abbildung 5.4: Schema zur Umrechnung vom Druckverlauf in äquivalente Punktquellen am Interface.

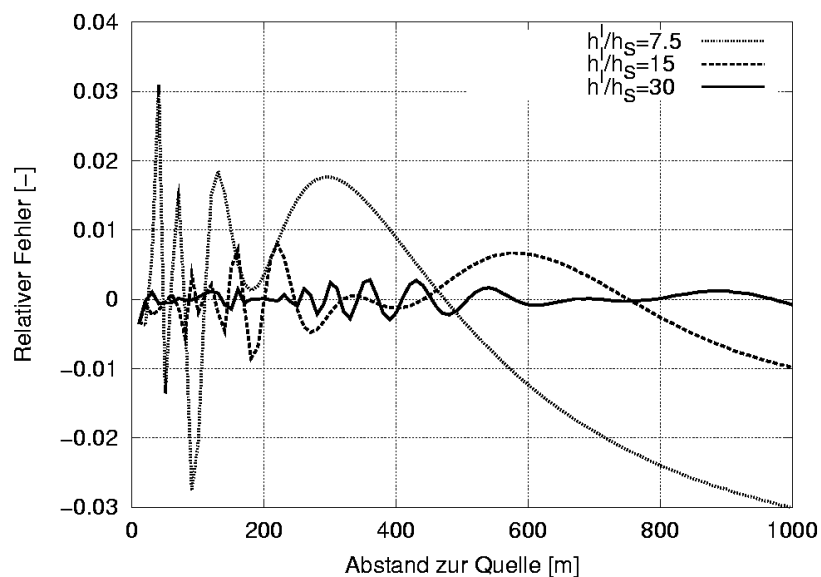


Abbildung 5.5: Abnahme des relativen Fehlers der Kopplungsmethode für zunehmende Höhen  $h^I$  des diskretisierten Interfaces bei konstanter Höhe  $h_S$  der Schallschutzmauer.

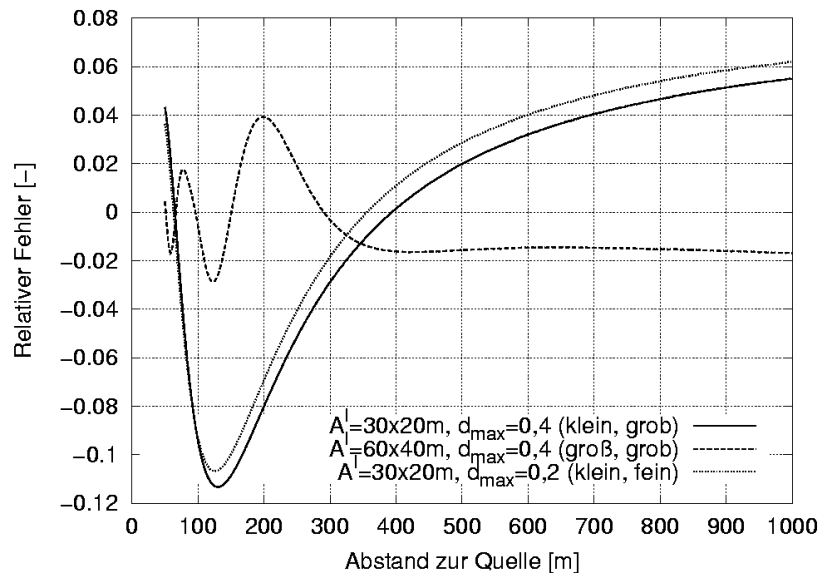


Abbildung 5.6: Relativer Fehler für drei verschiedene Arten des diskretisierten Interfaces:  $A^I = 30\text{ m} \times 20\text{ m}$ ,  $d_{\max} = 0,4\text{ m}$  (klein, grob);  $A^I = 60\text{ m} \times 40\text{ m}$ ,  $d_{\max} = 0,4\text{ m}$  (groß, grob);  $A^I = 30\text{ m} \times 20\text{ m}$ ,  $d_{\max} = 0,2\text{ m}$  (klein, fein).

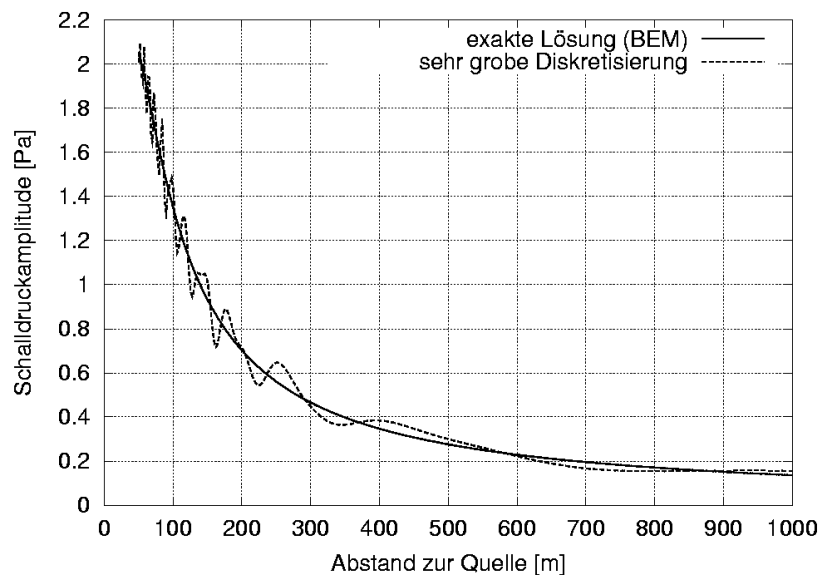


Abbildung 5.7: Vergleich einer Lösung mit zu grober Diskretisierung des Interfaces mit der exakten Lösung ( $f = 500\text{ Hz}$ ).

## 5.4 Kopplung mit der Methode der Fundamentallösungen

Die in Abschnitt 5.3 vorgestellte Kopplungsmethode basierend auf der indirekten Randelementmethode erfordert die Diskretisierung eines geschlossenen Interfaces und zur Lösung die Integration über dieses Interface, was mit einigem Aufwand verbunden sein kann. Daher wird im folgenden eine weitere, alternative Kopplungsmethode auf der Basis eines netzfreien Verfahrens entwickelt und deren Eignung zur Kopplung von BEM und Strahlenverfahren analysiert.

Die Methode der Fundamentallösungen (engl.: **Method of Fundamental Solutions**, MFS) wurde bereits für verschiedene Probleme erfolgreich angewendet. Eine Übersicht über Entwicklungen und Anwendungen der MFS für Streuungs- und Abstrahlprobleme in der Akustik kann in [25] gefunden werden. Die Anwendung der Methode bei akustischen Streuungsproblemen wird in [2] behandelt. Das Problem der Ermittlung von optimalen Quellpositionen für die MFS wird in [18] untersucht. In der Literatur ist die Methode unter verschiedenen Namen zu finden, u.a. als Multipol-Strahler-Synthese oder Ersatzquellenverfahren.

Die Vorteile der Methode der Fundamentallösungen sind in erster Linie ihre Eigenschaften als netzfreies Verfahren: Das Gebiet muss nicht diskretisiert werden wie es z.B. für die FEM notwendig ist. Ebenso ist keine Elementierung des Gebietsrandes wie bei der BEM erforderlich. Somit können die Randpunkte, an denen die bekannten Randbedingungen erfüllt werden sollen, beliebig auf dem Gebietsrand gewählt werden. Eine Integration über den Rand entfällt. Die Methode kann recht einfach in ein Computerprogramm implementiert werden. Für die Wahl Quellpositionen kann optional ein Optimierungsalgorithmus verwendet werden, um das Residuum an den vorgeschriebenen Randpunkten zu minimieren. Des Weiteren kann die Anzahl an Quellen niedriger gewählt werden als die Anzahl an Randpunkten, was den Bedarf an Rechenzeit für das Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (engl.: **Singular Value Decomposition**, SVD) wesentlich reduzieren kann.

Die Methode der Fundamentallösungen kann entweder für fest vorgegebene Quellpositionen wie im Abschnitt 5.4.2 oder mit dem bereits erwähnten Optimierungsalgorithmus (siehe Abschnitt 5.4.3) angewandt werden. Die letztgenannte Variante wird in der Literatur oft „Methode der Fundamentallösungen mit bewegten Quellen“ genannt. Wird die Methode mit festen Quellpositionen verwendet, so hängt die Güte der Lösung stark von der Wahl der Positionen ab.

### 5.4.1 Die MFS für akustische Probleme

Die Differenzialgleichung für akustische Probleme im Frequenzbereich ist die in Abschnitt 2.1.3 hergeleitete HELMHOLTZ-Gleichung (2.18). Für die im Folgenden behandelten Probleme soll die HELMHOLTZ-Gleichung im zweidimensionalen Raum gelöst werden.

Die Idee der Methode der Fundamentallösungen ist es, eine Reihe von Quellen so um das betrachtete Gebiet  $\Omega$  herum zu platzieren, dass gegebene Randbedingungen an diskreten Punkten auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  erfüllt werden. Abbildung 5.8 zeigt ein solches Gebiet mit  $M$  Randpunkten (mit  $\circ$  gekennzeichnet) und  $N$  Quellen ( $\bullet$ ). Jede Quelle  $j$  mit Position  $\xi_j$  außerhalb des Gebiets  $\Omega$  liefert einen Anteil zum Schalldruck am Punkt  $i$ , welcher der mit einem Intensitätsfaktor  $a_j$  gewichteten Fundamentallösung  $G(x_i, \xi_j)$  entspricht. Die Näherungslösung ergibt sich



dann als lineare Superposition aller Anteile  $j = 1, 2, \dots, N$  zu

$$\sum_{j=1}^N G(x_i, \xi_j) a_j = p(x_i), \quad x_i \in \Omega, \quad \xi_j \in \bar{\Omega}. \quad (5.4)$$

Es wird dafür die bereits in Abschnitt 3.1 erläuterte Halbraum-Fundamentallösung

$$G(x_i, \xi_j) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr') \quad (5.5)$$

verwendet.

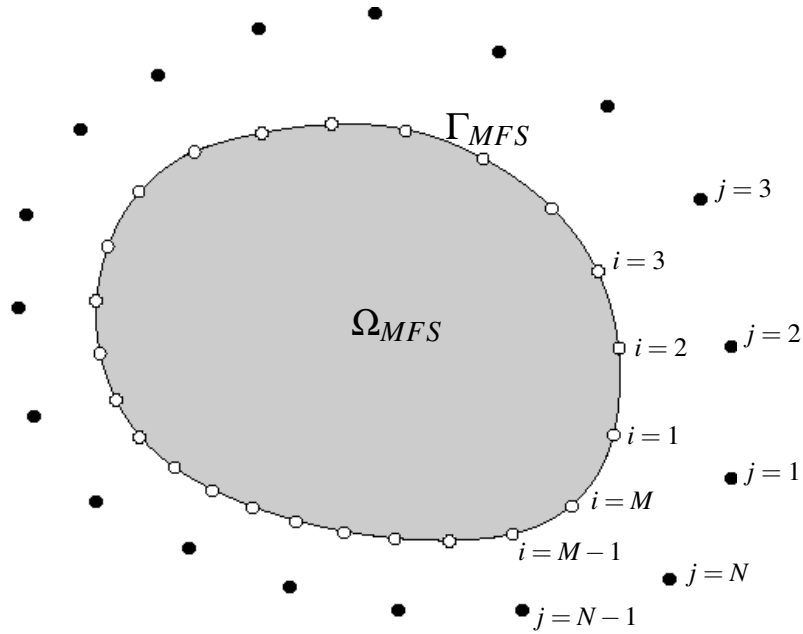


Abbildung 5.8: Skizze eines allgemeinen MFS-Problems.

Die Gleichung (5.4) wird als Randbedingung formuliert, indem als rechte Seite die bekannten Randwerte  $\bar{p}_i$  am Randpunkt  $i$  eingesetzt wird. Das Aufstellen dieser Randbedingung an allen  $M$  Randpunkten liefert ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (5.6)$$

wobei die Matrixeinträge  $A_{ij}$  den Einfluss einer Punktquelle mit Einheitsintensität an der Stelle  $j$  auf den Feldpunkt bei  $x_i$  beschreibt, also

$$A_{ij} = G(x_i, \xi_j). \quad (5.7)$$

Der Lösungsvektor  $\mathbf{x}$  enthält die unbekannten Quellintensitäten  $a_j$ , und der Vektor  $\mathbf{b}$  enthält die bekannten Randwerte.

Die Anzahl an Quellen  $N$  muss nicht gleich der Anzahl an Randpunkten  $M$  sein, sondern kann auch geringer sein. In diesem Fall ergibt sich ein nicht-quadratisches Gleichungssystem. Dieses Gleichungssystem beinhaltet ein lineares least-squares-Problem (d.h. die Suche der kleinsten Fehlerquadrate), das mit Hilfe der Singulärwertzerlegung gelöst werden kann. Die Matrix  $\mathbf{A}$  wird dabei zerlegt als Produkt dreier Matrizen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}' \quad (5.8)$$

$\mathbf{U}$  repräsentiert darin eine  $(M \times N)$ -Matrix, während  $\mathbf{V}'$  eine quadratische  $(N \times N)$ -Matrix darstellt. Die Spalten dieser beiden Matrizen sind orthonormal, d.h. es gilt

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T. \quad (5.9)$$

$\mathbf{S}$  ist eine Diagonalmatrix von der Dimension  $(N \times N)$  und enthält auf ihrer Hauptdiagonalen die Eigenwerte  $s_{ii}$  von  $\mathbf{A}$ . Durch die Zerlegung von  $\mathbf{A}$  folgt für die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  zur Berechnung der Lösung  $\mathbf{x}$

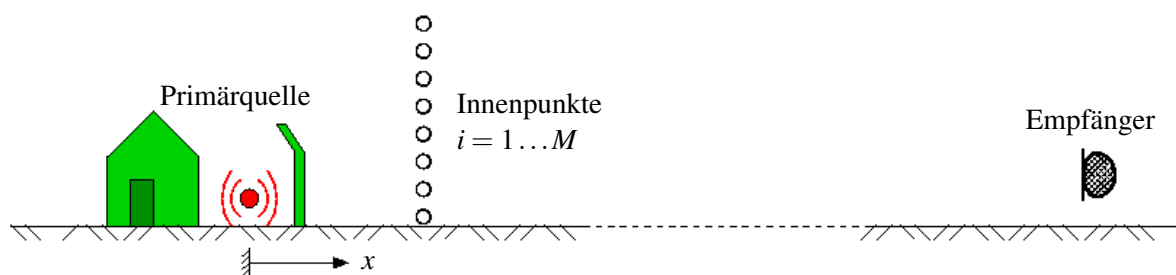
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \text{diag}(s_{ii}) \cdot \mathbf{U}. \quad (5.10)$$

Die Geometrie des zu lösenden Problems der Kopplung von Randelementmethode und Strahlenverfahren zur Berechnung der Schallausbreitung im Freien unterscheidet sich etwas von der in Abb. 5.8 skizzierten Anordnung. Statt des in der Abbildung betrachteten Innenraumproblems mit einem abgeschlossenen Gebiet  $\Omega$  und einem fest definierten Rand  $\Gamma$  handelt es sich bei dem bereits beschriebenen Kopplungsproblem um einen unendlichen Halbraum, also ein Außenraumproblem. Zudem existiert kein fest vorgegebener Rand des Raytracinggebiets. Diese Besonderheiten erfordern einerseits eine genauere Untersuchung und ermöglichen andererseits eine flexiblere Anwendung der Methode der Fundamentallösungen. Die Bezeichnungen aus Abb. 5.8 werden aus Konsistenzgründen auch für das im Folgenden behandelte Kopplungsproblem verwendet. Zwar besitzen die beiden Berechnungsgebiete keinen fest vorgegebenen gemeinsamen Rand und somit auch keine Randpunkte im eigentlichen Sinne mehr, der Begriff und die Kennzeichnung in Abbildungen ( $\circ$ ) werden jedoch beibehalten.

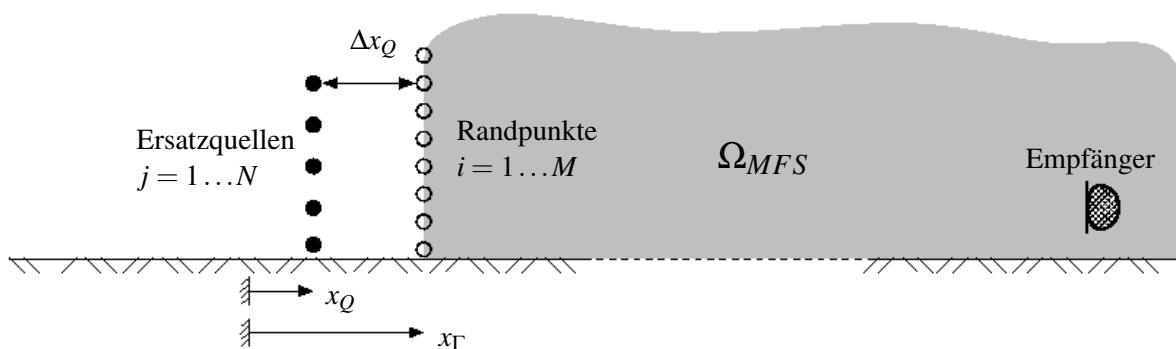
## 5.4.2 Lösung mit fixen Quellpositionen

Die in diesem Abschnitt vorgestellten numerischen Ergebnisse werden mit festen Quellpositionen erzielt. Die vor der Berechnung festgelegte Position der Quellen ändert sich während der Berechnung nicht. Das Gleichungssystem bzw. das damit verbundene least-squares-Problem wird nur einmal gelöst. In Abbildung 5.9(a) ist die Ausgangskonfiguration mit der Primärquelle und Hindernissen im Nahfeldbereich dargestellt. Dieses Nahfeld wird mit Hilfe der MFS durch eine Anzahl Quellen ( $\bullet$ ) approximiert (Abb. 5.9(b)). Dabei wird gefordert, dass der Schalldruck in den Randpunkten ( $\circ$ ) den Ergebnissen aus einer BEM-Rechnung mit Primärquelle und diskretisierten Hindernissen entsprechen. Die Anordnung der MFS-Quellen und Randpunkte ist dabei beliebig. Für eine Raytracing-Berechnung muss jedoch sichergestellt werden, dass sich die Quellen im Nahfeld befinden, um den Effekt der Refraktion korrekt zu erfassen. Als geeignete Anordnung von Quell- und Randpunkten erweist sich eine vertikale Linie (bzw. in 3D eine vertikale Fläche) als günstig, auf der die Punkte äquidistant verteilt werden. Die Reihe von

Randpunkten in Abb. 5.9(b) kann als Rand des Fernfelds angesehen werden - d.h. des Gebiets, in dem das Strahlenverfahren verwendet werden soll.



(a) Konfiguration für BEM.



(b) Konfiguration für MFS.

Abbildung 5.9: Skizze der MFS-Geometrie für das spezielle Kopplungsproblem mit fixen Quellpositionen.

Abbildung 5.10 zeigt die Konditionszahl der Matrix  $\mathbf{A}$  in Abhängigkeit von der Quellenanzahl. Die einzelnen Kurven repräsentieren verschiedene Positionen der Quellen, die ebenso wie die Randpunkte (bzw. Stützstellen) jeweils in vertikalen Linien bei angeordnet sind. Die Randpunkte sind gleichmäßig über eine Höhe von  $60\text{ m}$  verteilt, d.h. im Abstand von  $0,1\text{ m}$  zwischen zwei Randpunkten. Die Quellpunkte werden ebenfalls im vertikalen Abstand von  $0,1\text{ m}$  platziert, die maximale Höhe hängt somit von der Anzahl  $N$  ab. Die Lage der Stützstellen wird bei  $x_\Gamma = 10,5\text{ m}$  gewählt. Nur der horizontale Abstand  $\Delta x_Q$  zwischen Quellpunkten und Stützstellen wird variiert und muss größer null sein, um Singularitäten zu vermeiden. Die Anzahl an Randpunkten ist zu  $M = 600$  festgelegt. Das betrachtete Ausgangsproblem ist dabei der „Lärmschutzwall II“ aus Abb. 5.1. Die Ergebnisse zeigen sehr unterschiedliche Konditionszahlen für die drei betrachteten Quellpositionen. Liegen die Quellen in - relativ zum Abstand zweier Randpunkte - zu großer Entfernung von den Randpunkten, so ist das Gleichungssystem sehr schlecht konditioniert. Werden sie dagegen zu nahe an den Randpunkten positioniert, so werden die Ma-

trixeinträge sehr groß (Singularität für  $r \rightarrow 0$ ). Die Konditionszahl der resultierenden Matrix steigt jeweils mit der Anzahl an Quellen und hängt für dieses Beispiel stark von der gewählten Quellposition ab.

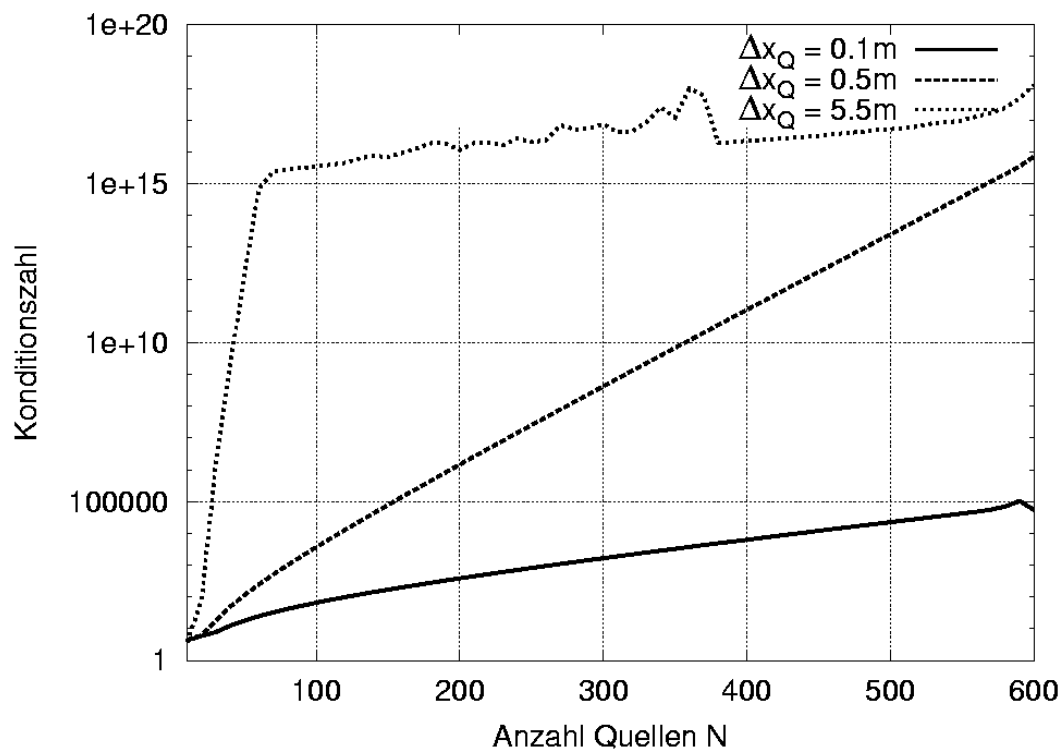


Abbildung 5.10: Konditionszahl der Systemmatrix in Abhängigkeit der Quellenanzahl; verschiedene Quellpositionen bei  $\Delta x_Q = 0,1\text{ m}$ ,  $0,5\text{ m}$  und  $5,5\text{ m}$ .

In Abbildung 5.11 ist der relative Fehler an den Innenpunkten über dem horizontalen Abstand von der Primärquelle aufgetragen. Um die Auswirkung der Konditionszahl auf die Qualität der Lösung zu verdeutlichen, werden dieselben drei Quellpositionen wie in Abb. 5.10 betrachtet. Die Lösung, für die der Fehler in Abb. 5.11 analysiert wird, ist der Schalldruck an Innenpunkten, die sich im Abstand von bis zu  $1000\text{ m}$  von der Primärquelle befinden.

Die Berechnung des Drucks an diesen Punkten mit der Methode der Fundamentallösungen kann nur für die Annahme einer homogenen Atmosphäre geschehen, da die verwendete Halbraum-Fundamentallösung nur für homogene Gebiete gilt. Der relative Fehler ergibt sich aus einem Vergleich zweier Lösungen: Die exakte Lösung berechnet sich mit der direkten Randelementmethode. Dieser Referenzlösung wird die Näherungslösung aus dem Zwei-Schritt-Verfahren (BEM-MFS) gegenüber gestellt. Die Differenz dieser beiden Lösungen relativ zum exakten Wert ergibt den relativen Fehler. Zu dieser Fehlerermittlung werden alle Werte als Absolutwerte - also Amplituden - eingesetzt. Die Anzahl der Randpunkte ist  $M = 600$ , es werden  $N = 200$  Quellen gewählt. Abb. 5.11 zeigt, dass zwei der drei Fehlerkurven ein günstiges Verhalten zeigen, d.h. dass für die Quellpositionen  $\Delta x_Q = 0,1\text{ m}$  und  $\Delta x_Q = 0,5\text{ m}$  der Fehler über die horizontale Achse annähernd konstant bleibt. Der Fehler für  $\Delta x_Q = 5,5\text{ m}$  hingegen divergiert für

größer werdende Abstände von der Primärquelle. Dies ist die Folge der sehr hohen Konditionszahl von etwa  $10^{16}$  (siehe Abb. 5.10, für  $N = 200$ ).

Die Fehleranalyse zeigt des Weiteren, dass für alle drei Kurven - d.h. für unterschiedliche Quellpositionen - der Fehler im ersten Punkt nahezu verschwindet, da in diesem als Randpunkt explizit die Erfüllung der Randbedingung gefordert wird. Im Abstand bis zu  $x = 100\text{m}$  treten deutlich höhere Fehler auf. Die Näherungslösung für das Schalldruckfeld ist dort nicht glatt und es ergeben sich relative Fehler von punktuell über 25%. In einiger Entfernung von der Quelle glättet sich die Näherungslösung und zeigt sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung. Der Fehler ist dann nahezu konstant über die weitere Distanz, auch im Abstand von  $10\text{km}$  (in Abb. 5.11 nicht dargestellt) bewegt er sich bei etwa ein oder zwei Prozent für die beiden Quellpositionen  $\Delta x_Q = 0,1\text{m}$  und  $\Delta x_Q = 0,5\text{m}$ .

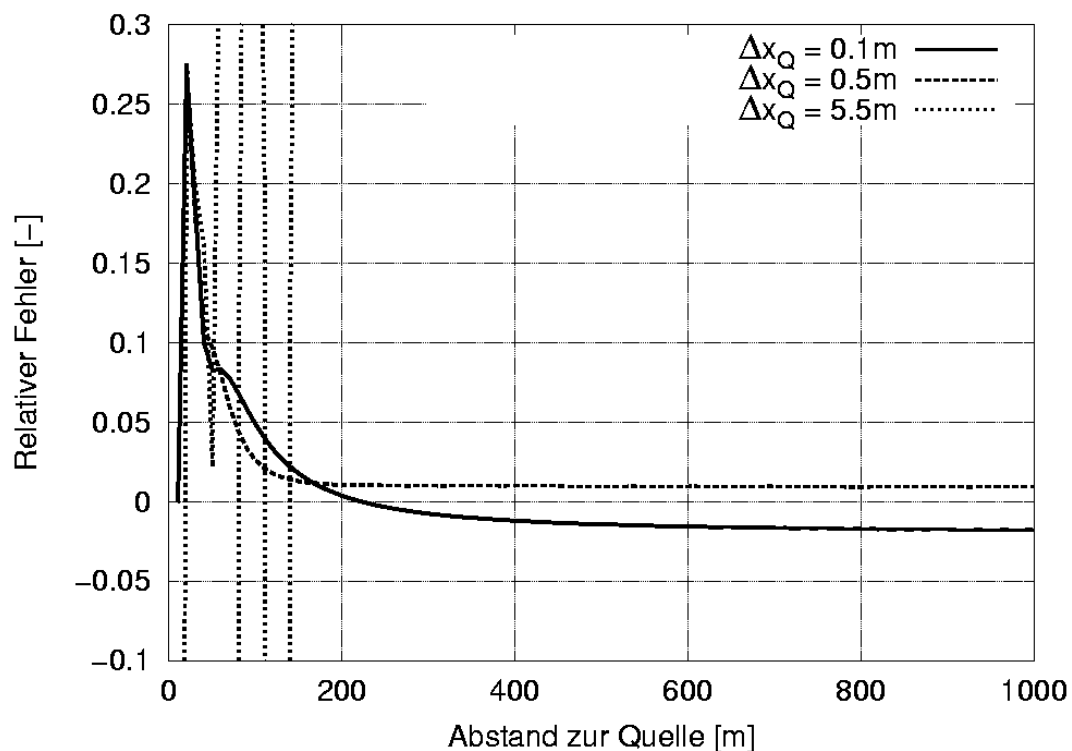


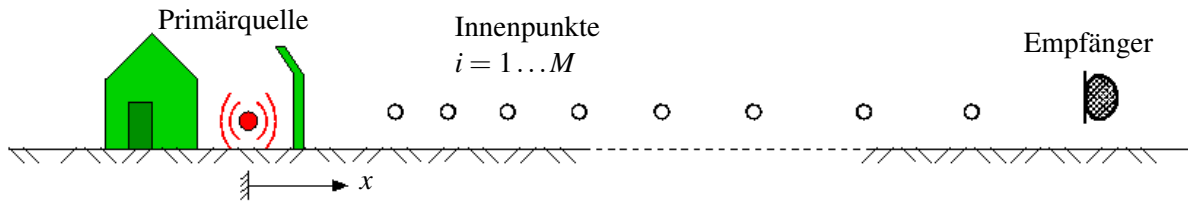
Abbildung 5.11: Relativer Fehler an Innenpunkten für verschiedene Quellpositionen bei  $\Delta x_Q = 0,1\text{m}$ ,  $0,5\text{m}$  und  $5,5\text{m}$ .

### 5.4.3 Reduktionsmodell mit Optimierung

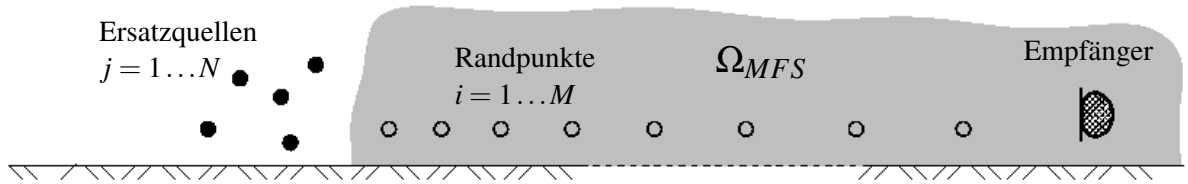
Für die Optimierung der Quellpositionen, wie sie im folgenden Abschnitt erläutert und angewendet wird, ist die Funktion *lmdif* aus dem Paket MINPACK [40] der *Netlib*-Bibliothek implementiert. Diese Funktion minimiert die Quadratsumme von nichtlinearen Funktionen mit Hilfe eines modifizierten LEVENBERG-Marquardt-Algorithmus'. Für einen solchen Gradienten-basierten Optimierungsalgorithmus ist es in der Regel äußerst schwierig, das globale Extremum

zu finden, wenn die gegebene Funktion viele lokale Minima und Maxima aufweist.

Bei einem nicht-trivialen, komplexwertigen Schalldruckfeld, wie es sich beispielsweise in der Schattenzone einer Schallschutzwand ausbildet, erhält man bei der Verwendung der MFS ein Residuum, welches räumlich stark oszilliert. Eine Optimierung mit einem Gradienten-basierten Verfahren führt in diesem Fall meist nur zu einer marginalen Verschiebung der Quellpositionen und der Algorithmus bricht beim nächstgelegenen Minimum des Residuums ab. Eine brauchbare Lösung kann somit nur erzielt werden, wenn die gewählte Anfangsposition bereits sehr nahe am Optimum liegt.



(a) Konfiguration für BEM.



(b) Konfiguration für MFS.

Abbildung 5.12: Skizze der MFS-Geometrie für das spezielle Kopplungsproblem mit Optimierung.

Um diese Probleme zu vermeiden, wird im Folgenden ein Ansatz vorgeschlagen, der das komplexe Schalldrucksignal in seine Amplituden- und Phaseninformation aufspaltet. Es wird gezeigt, dass mit dieser Aufspaltung auch ein Gradienten-basierter Optimierungsalgorithmus erfolgreich angewandt werden kann, um die optimale Quellposition der MFS-Quellen zu bestimmen. Wenn die Optimierung zunächst nur hinsichtlich der Amplituden vorgenommen wird, so wird das Residuum dadurch geglättet und das Problem ist durch den Optimierungsalgorithmus wesentlich einfacher zu lösen. Der in Zeit und Raum harmonische Verlauf wird dann in einem zweiten Schritt wieder hinzugefügt. Um nur die Amplitude für die Optimierung zu berücksichtigen, wird der MFS-Algorithmus leicht verändert, sodass die Fundamentallösung durch ihren Betrag ersetzt wird und als Randbedingungen die Druckamplituden vorgeschrieben werden:

$$\sum_{j=1}^N |G(x_i, \xi_j)| \cdot a_j = |p(x_i)|, \quad x_i \in \Omega, \quad \xi_j \in \bar{\Omega}. \quad (5.11)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$ , die rechte Seite  $\mathbf{b}$  und der Lösungsvektor  $\mathbf{x}$  enthalten dann reelle Werte an Stelle von komplexen Werten, was den Speicherbedarf um die Hälfte reduziert. Der Optimierungsalgorithmus führt auf die Quellposition, die mit dem geringsten Residuum an den Randpunkten  $i = 1 \dots M$  einher geht. Als Lösung erhält man für jeden Quellpunkt optimierte Koordinaten  $x_j^*$  sowie einen reellen Wert  $a_j$ , der die Amplitude der Intensität darstellt. Um die fehlende Phaseninformation für eine komplexe Intensität  $\hat{a}_j$  zu erhalten, schreibt man diese zunächst in der EULERSchen Form als

$$\hat{a}_j = |a_j| e^{i\varphi_j}, \quad (5.12)$$

wobei  $\varphi_j$  den Phasenwinkel bzw. das Argument der komplexen Größe darstellt. Die Bestimmung dieses Phasenwinkels folgt aus einer einzigen weiteren komplexen Bedingung, z.B. an einem Feldpunkt  $P_{RB}$  im Fernfeld, an dem der exakte komplexe Schalldruck  $\bar{p}_{RB}$  bekannt ist. Schreibt man die komplexe Druck-Randbedingung im Punkt  $P_{RB}$  ebenfalls in der EULERSchen Form als

$$p(x_{RB}) = |p(x_{RB})| e^{i\varphi_{RB}}, \quad (5.13)$$

dann lautet die Bedingung für den Anteil der Quelle  $j$  in  $\xi_j$  am Gesamtschalldruck:

$$\arg\{a_j e^{i\varphi_j} G(x_{RB}, \xi_j)\} \stackrel{!}{=} \varphi_{RB} = \arctan\left(\frac{\Im\{p_{RB}\}}{\Re\{p_{RB}\}}\right), \quad j = 1 \dots N. \quad (5.14)$$

In Worten bedeutet dies, dass am Feldpunkt  $P_{RB}$  die Phase des Drucks aus der Quelle  $j$  mit der Phase der komplexen Druck-Randbedingung übereinstimmen muss. Daraus lässt sich für jeden Quellpunkt  $j$  der Phasenwinkel  $\varphi_j$  der Anregung und damit die komplexe Intensität  $\hat{a}_j$  mit Gleichung (5.12) bestimmen.

Als Randpunkte des MFS-Problems werden im Folgenden Punkte im Fernfeld der Primärquelle gewählt. Da das Kopplungsproblem bzw. die beiden Berechnungsgebiete keinen vorgegebenen gemeinsamen Rand besitzen, sind dies keine Randpunkte im eigentlichen Sinne mehr. Die Bezeichnungen als „Randpunkte“ und „Randbedingungen“ werden jedoch - der Abb. 5.8 folgend - beibehalten. Diese Punkte im Fernfeld zu platzieren, hat den Hintergrund, dass dort der eigentlich interessierende Bereich liegt.

In Abbildung 5.13 ist für den Fall von nur einer Quelle ( $N = 1$ ) das Residuum als Funktion der Quellposition dargestellt. Diese Residuen werden ohne Optimierung berechnet, um eine Vorstellung des Funktionsverlaufs zu bekommen, aus dem der Optimierungsalgorithmus dann das Minimum finden soll. Es zeigt sich, dass als geeigneter Startpunkt für die Optimierung z.B. die Krone der Schallschutzwand gewählt werden kann, im vorliegenden Fall bei  $x_B = 10,5\text{ m}$ ,  $h_B = 4\text{ m}$ . Abbildung 5.14 zeigt den relativen Fehler der Druckamplitude an Innenpunkten im Fernfeld, für den Fall einer Schallschutzwand der Höhe  $h_B = 4\text{ m}$  bei  $x = 10,5\text{ m}$  und Anregung durch eine Punktschallquelle bei  $x = 0$  und  $h_S = 0,5\text{ m}$  mit Frequenz  $f = 100\text{ Hz}$ . Es werden fünf Punkte gewählt, an denen die Druckamplitude als Randbedingung vorgegeben wird. Diese liegen bei  $x = 40\text{ m}$ ,  $70\text{ m}$ ,  $200\text{ m}$ ,  $700\text{ m}$  und  $1000\text{ m}$ . Die Höhe der Punkte beträgt jeweils  $h = 5\text{ m}$ . Die beiden Fehlerkurven sind für nur eine Ersatzquelle ( $N = 1$ ) bzw. zwei Ersatzquellen ( $N = 2$ ) angegeben. Für  $N = 1$  kann bei den o.g. fünf Punkten der Randbedingungen ein Anwachsen des relativen Fehlers mit steigendem Abstand von der Primärquelle beobachtet werden. Dies ist so zu erklären, dass das Residuum, welches hier minimiert wird, als absolute Abweichung von

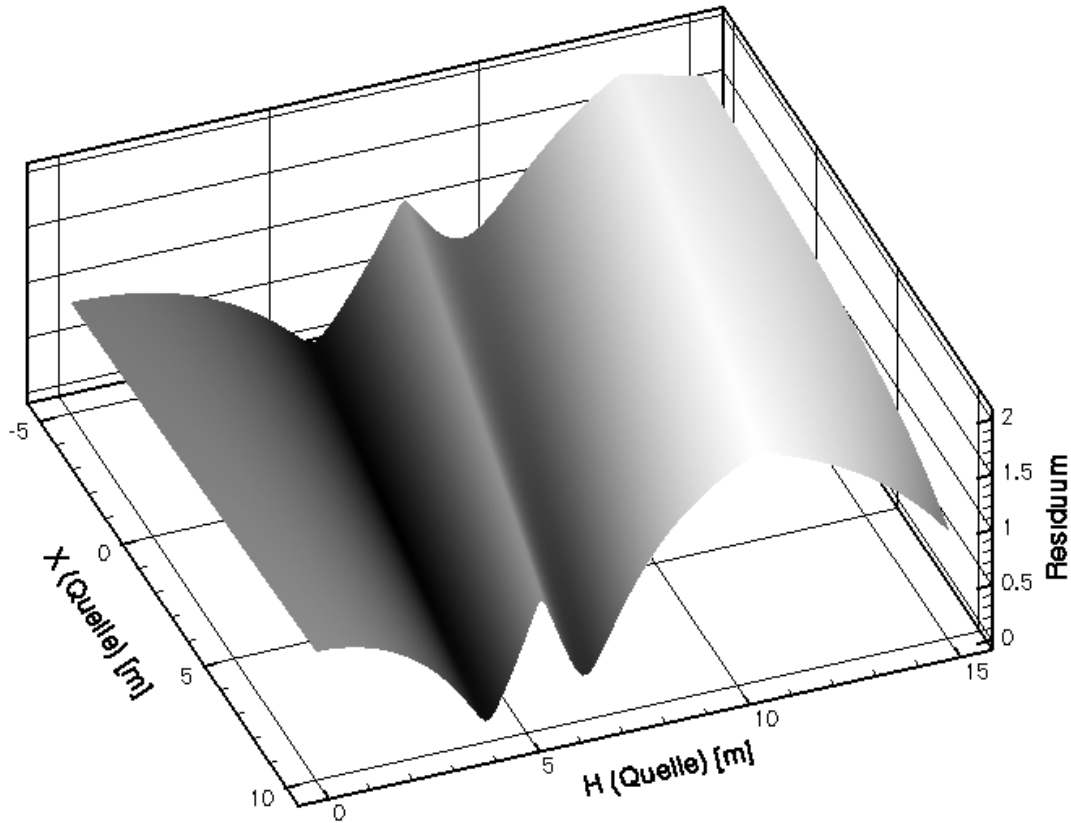


Abbildung 5.13: Residuum in Abhängigkeit der Quellposition für  $N = 1$ .

der vorgegebenen Randbedingung formuliert ist. Da die Punkte nahe der Primärquelle höhere Druckamplituden aufweisen, werden diese Punkte implizit stärker gewichtet, wenn das Residuum über die gesamte horizontale Distanz gemittelt wird. Die optimale Quellposition wird vom Optimierungsalgorithmus gefunden bei  $(x^* = 1,585\text{ m}, z^* = 5,010\text{ m})$  für  $N = 1$  und bei  $(x_1^* = 12,139\text{ m}, z_1^* = 1,951\text{ m})$ ,  $(x_2^* = 8,618\text{ m}, z_2^* = 2,511\text{ m})$  für  $N = 2$ . Die gemittelten Residuen betragen  $3,841 \cdot 10^{-3}$  ( $N = 1$ ) bzw.  $1,695 \cdot 10^{-11}$  ( $N = 2$ ) und sind im Vergleich zur Größenordnung der Amplitudenwerte verschwindend gering.

Der erhaltenen Näherungslösung für die Druckamplitude wird anschließend der charakteristische harmonische Verlauf mit Hilfe des komplexen Faktors aus Gleichung 5.12 aufgeprägt. Die Ergebnisse eines Vergleichs zwischen exakter Lösung und der komplexen Näherungslösung, die mit dem reduzierten Modell erzielt werden, sind in Abbildung 5.15 dargestellt. Es wird der einfache Fall einer Punktquelle über schallhartem Boden betrachtet. Die analytische Lösung entspricht also der Halbraum-Fundamentallösung. Für die Näherungslösung wird der Betrag derselben Halbraum-Fundamentallösung mit einem Faktor  $e^{i\varphi}$  multipliziert, wobei sich  $\varphi$  aus



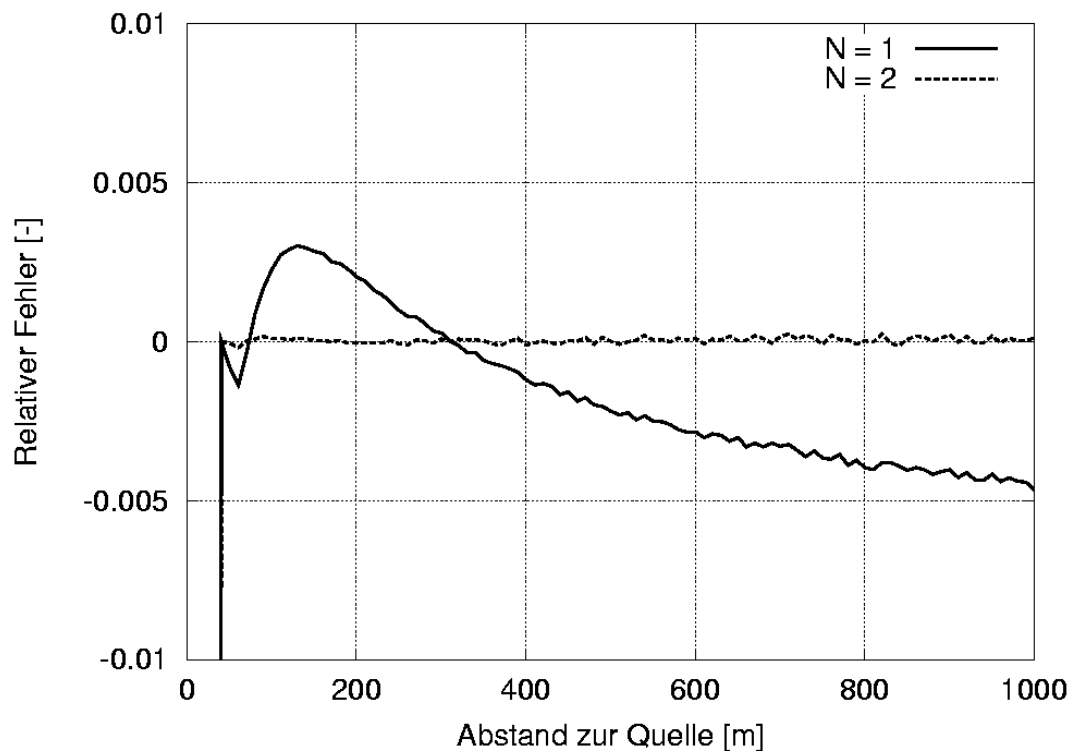


Abbildung 5.14: Relativer Fehler der Druckamplitude an Innenpunkten.

einer komplexen Bedingung im Fernfeld (hier wird  $x = 500\text{ m}$  gewählt) ergibt. Für geringe Distanzen von der Primärquelle ist ein Phasenfehler zu erkennen, der jedoch mit zunehmendem Abstand verschwindet. Er taucht dort auf, wo der Unterschied zwischen  $r_1$  und  $r_2$  im Vergleich zur Wellenlänge nicht vernachlässigbar ist. Daher wird der horizontale Bereich, in der dieser Phasenunterschied auftritt, kleiner, je kleiner die Anregungsfrequenz und je geringer die Höhe der Primärquelle über dem Boden ist.

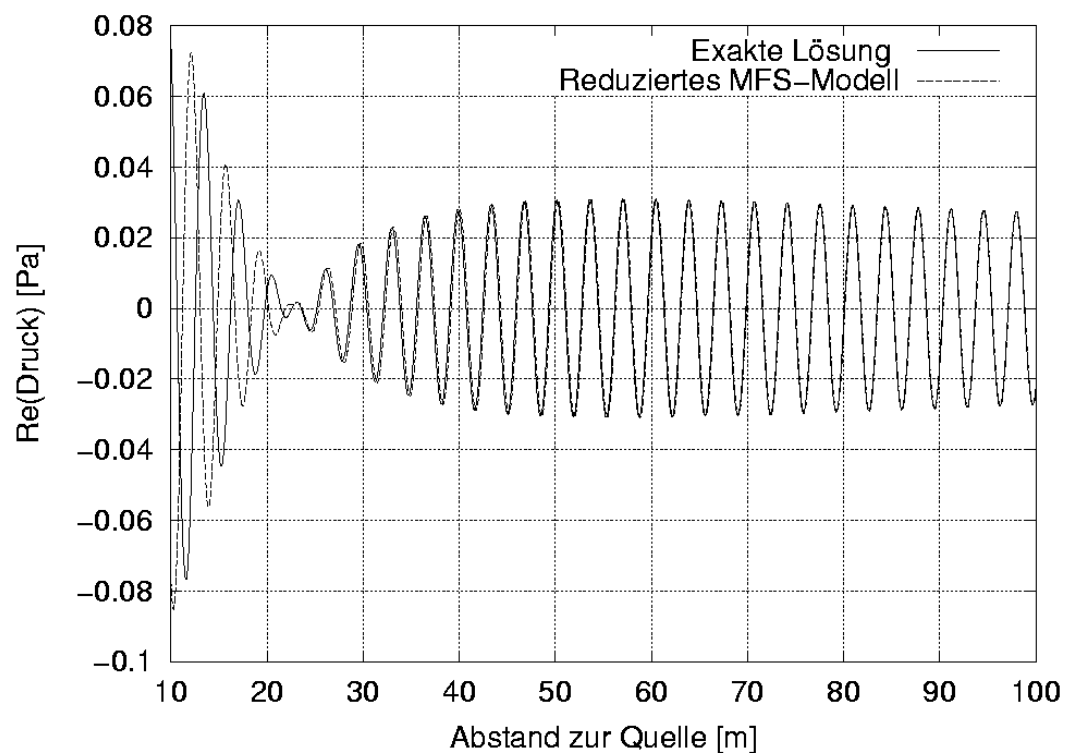


Abbildung 5.15: Vergleich des Realteils der Näherungslösung (reduziertes Modell) mit der exakten Lösung; Ausschnitt bis  $x = 100\text{ m}$  Entfernung von der Primärquelle.

# Kapitel 6

## Anwendungen

In den vorangehenden Kapiteln dieser Arbeit werden Methoden aufgezeigt bzw. entwickelt, mit denen eine numerische Untersuchung der Schallausbreitung unter verschiedenen Einflüssen ermöglicht wird. In diesem Kapitel sollen typische Beispiele der Anwendung gezeigt werden, wo diese Methoden eingesetzt werden können.

Zunächst wird in Abschnitt 6.1 untersucht, ob ein Zusammenwirken von Fluid und Struktur für die hier betrachtete Problemstellung maßgeblichen Einfluss auf das ermittelte Schallfeld hat. In Abschnitt 6.2 wird anschließend die Schallschutzwirkung von unterschiedlichen baulichen Maßnahmen rechnerisch analysiert, indem vor allem das entwickelte hybride Verfahren aus Abschnitt 5.3 zum Einsatz kommt. Bei den Beispielen handelt es sich um die gegen Verkehrslärm häufig eingesetzte Schallschutzwand, einen Lärmschutzwall sowie einen Trog, wie er etwa in innerstädtischen Bereichen zu finden ist.

### 6.1 Fluid-Struktur-Interaktion an Schallschutzwänden

Die Wechselwirkung von Struktur und Fluid ist für viele Bereiche der Mechanik von großer Bedeutung. So kann z.B. die Aerodynamik von Tragflügeln nur unter Einbeziehung der Interaktion zwischen Anströmungsfeld und Strukturbewegung analysiert werden. Auch die Entstehung von Schall ist oft durch Interaktionseffekte zu erklären, wenn es durch die Wechselwirkung zu periodischen Bewegungen der Struktur kommt oder wenn im Fluid auftretende turbulente Wirbel auf die Struktur treffen. In der Bauakustik würde ohne Zusammenwirken von Fluid und Struktur keine Schallübertragung in einen Nachbarraum stattfinden. Wenn die Schwingung des Trennbauteils vernachlässigt wird, kann rechnerisch auch kein Schall in den angrenzenden Raum abgegeben werden.

Bei der Schallausbreitung im Freien werden an Verkehrswegen meist Schallschutzwände als Lärmschutzmaßnahme eingesetzt. Dass diese Wände nicht den gesamten Lärm der Fahrzeuge abschirmen, kann wohl jeder Anwohner bestätigen. Allerdings hat diese Tatsache bei Schallschutzwänden mehrere Ursachen, die zu einem hörbaren Pegel auch in der geometrischen Schattenzone der Wand führen: Der Schall wird an den Kanten gebeugt und kann daher auch in Bereiche hinter der Schallschutzwand eintreten (vgl. Abschnitt 2.3.2). Die Schwingungen der

Wand, die durch die Schallquelle angeregt wird, führen auf der quellabgewandten Seite wieder zur Schallabstrahlung. Dieser Vorgang wird als Transmission bezeichnet. Außerdem kann - wie in Abschnitt 2.3.3 erläutert - der Refraktionseffekt dazu führen, dass der Schall abwärts gebrochen wird und so in den geometrischen Schattenbereich gelangt.

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welchen Anteil am Gesamtschalldruck die Interaktion zwischen Struktur und Fluid - d.h. die Transmission durch die Wand - für übliche Anwendungen von Schallschutzwänden einnimmt. Daraus kann abgeschätzt werden, ob und evtl. für welche Fälle die Berücksichtigung der Interaktion bei der Berechnung von Schallausbreitung im Freien notwendig ist. Die Berücksichtigung der Interaktion bedeutet in diesem Zusammenhang die Modellierung der Schallschutzwand als elastische, schwingende Struktur.

Die Kopplung dieser schwingenden Struktur an das umgebende Fluid kann, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben, auf mehrere Arten erfolgen. Hier wird zur Ermittlung der Größenordnung des Interaktionseffekts eine einseitige Kopplung gewählt. Ein Modell für die strenge Fluid-Struktur-Kopplung sowie ein Vergleich zwischen einseitiger und strenger Kopplung wird in [33] am Beispiel zweier benachbarter Räume mit Trennbauteil gezeigt.

Die Berechnung der Strukturschwingung wird mit der Finite Elemente Methode (FEM) durchgeführt. Die Modellierung der Schallschutzwand erfolgt hierbei als MINDLIN-Platte mit DSG-Stabilisierung ([20], [11]). Die Lagerung der Wand wird im FE-Modell als feste Einspannung modelliert. Ihre Höhe beträgt  $h = 2\text{ m}$ . Als Material wird Plexiglas ( $E = 5,14 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 1155 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,37$ ,  $d = 0,02 \text{ m}$ ) gewählt. Die Punktquelle wird im Abstand von  $1 \text{ m}$  zur Wand und in der Höhe von  $h_Q = 0,5 \text{ m}$  über dem Boden platziert.

Die Berechnung gliedert sich in drei Rechenschritte, die als Schema in Abb. 6.1 dargestellt sind: Im ersten Schritt wird die akustische Belastung auf die elastische Wand ermittelt, indem in einer Randelementrechnung eine Schallquelle aufgebracht wird und der Schalldruck an der Wandoberfläche berechnet wird. Dabei wird als Randbedingung zunächst eine schallharte Oberfläche ( $\bar{q} = \partial \bar{p} / \partial n = 0$ ) angenommen. Im zweiten Schritt wird aus der Druckverteilung  $\bar{p}$  auf der Oberfläche die Antwort der als Platte modellierten schwingenden Struktur mit einem FE-Programm berechnet. Die Lage der Platte entspricht dabei der Mittellinie der für die BEM diskretisierte Wand mit endlicher Dicke. Der resultierende Druck  $\bar{p}$ , der als Randbedingung für die FE-Berechnung aufgebracht wird, ergibt sich aus der Differenz des Schalldrucks auf beiden Seiten der Wand, der aus der ersten BEM-Rechnung bekannt ist. Das Ergebnis der FE-Strukturberechnung ist eine Schnelleverteilung auf der Platte. Die Schnelle  $v$  kann mit Gleichung (2.26) in eine Flussrandbedingung  $\bar{q}$  umgerechnet werden, die in einer zweiten BEM-Rechnung auf beiden Seiten der Wand aufgebracht wird. Diese Flussrandbedingung, die die Vibration der Platte widerspiegelt, regt zusätzlich zur Primärschallquelle das umgebende Fluid an.

Die Auswertung des Schalldruckfelds erfolgt auf zwei verschiedene Arten: Es wird in der unmittelbaren Umgebung der Schallschutzmauer ein Ausschnitt der Größe  $l \times h = 12 \text{ m} \times 5 \text{ m}$  als Innenpunktnetz diskretisiert, um dort das Schallfeld als Konturplot darstellen zu können (siehe Abbildung 6.2). Um den Einfluss einer Fluid-Struktur-Kopplung auf das in dieser Arbeit besonders interessierende Fernfeld der Schallquelle abschätzen zu können, wird eine linienförmige Empfängerketten auf einer konstanten Höhe ( $h_p = 1,5 \text{ m}$ ) im Abstand von bis zu  $1000 \text{ m}$  auf der quellabgewandten Seite der Schallschutzwand platziert.

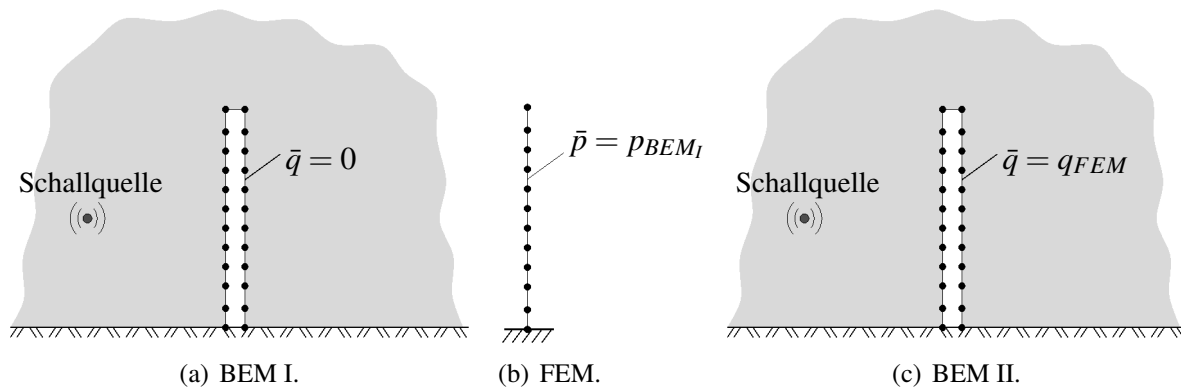


Abbildung 6.1: Schema der einseitigen Fluid-Struktur-Kopplung an der Schallschutzwand.

Der Unterschied der beiden Berechnungen - mit der Annahme einer starren Wand bzw. unter Einbeziehung der einseitigen Fluid-Struktur-Kopplung - ist in Abbildung 6.2 gezeigt. Dargestellt ist die Pegeldifferenz zwischen den beiden Ergebnissen in einem Empfängerausschnitt (Innenpunktnetz), der den Bereich von zwei Meter vor der Wand - bezogen auf die Punktquelle - bis zehn Meter hinter der Wand zeigt. Die Differenz ist nur hörbar, wo sie größer als etwa  $1\text{ dB}$  ist. An Hand des Konturplots ist zu erkennen, dass sich lediglich an einigen Stellen in der Schallschattenzone der Wand hörbare Unterschiede ergeben. Die Differenzen sind sowohl positiv als auch negativ und ihre Maxima bzw. Minima liegen dicht beieinander, da sich zwischen beiden Konfigurationen die Stellen örtlicher Interferenzen nur leicht verschieben.

Die Auswirkungen auf größere Distanzen von der Quelle sind in Abb. 6.3 dargestellt. Auch im Fernfeld bleiben die Pegeldifferenzen unter der Grenze von  $1\text{ dB}$ . Das Vorzeichen hängt von der Anregungsfrequenz ab. Für einige Frequenzen überlagern sich offensichtlich die beiden Anteile aus Beugung und Transmission als konstruktive Interferenz, für andere Frequenzen löschen sie sich dagegen teilweise aus.

Die Ergebnisse lassen den Schluss zu, dass bei der hier beabsichtigten Anwendung die Interaktionseffekte zwischen Schallfeld und den Strukturen z.B. von Schallschutzwänden durch andere Effekte wie Beugung und Refraktion dominiert werden und somit für die im Folgenden durchgeführten Berechnungen vernachlässigt werden dürfen. Für andere Fälle wie z.B. zusätzlichen Häusern direkt hinter der Lärmschutzwand - d.h. wo der transmittierte Schall Mehrfachreflexionen erfährt - sollte dies jedoch erneut überprüft werden.

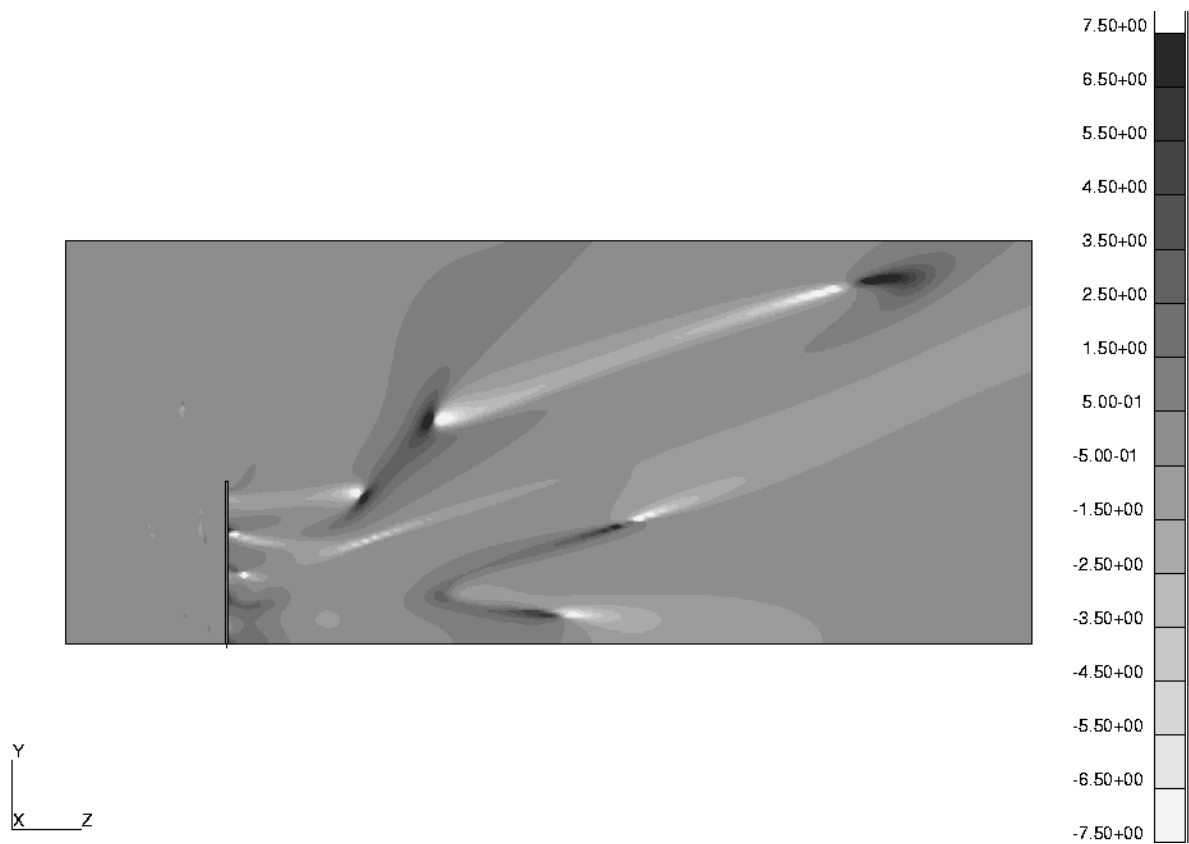


Abbildung 6.2: Pegeldifferenz  $\Delta L$  [dB] zwischen den Berechnungen mit starrer Wand bzw. mit Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Kopplung; Empfängerpunktnetz mit Abmessungen  $l \times h = 12\text{ m} \times 5\text{ m}$  im Nahfeld der Schallschutzwand;  $f = 500\text{ Hz}$ .

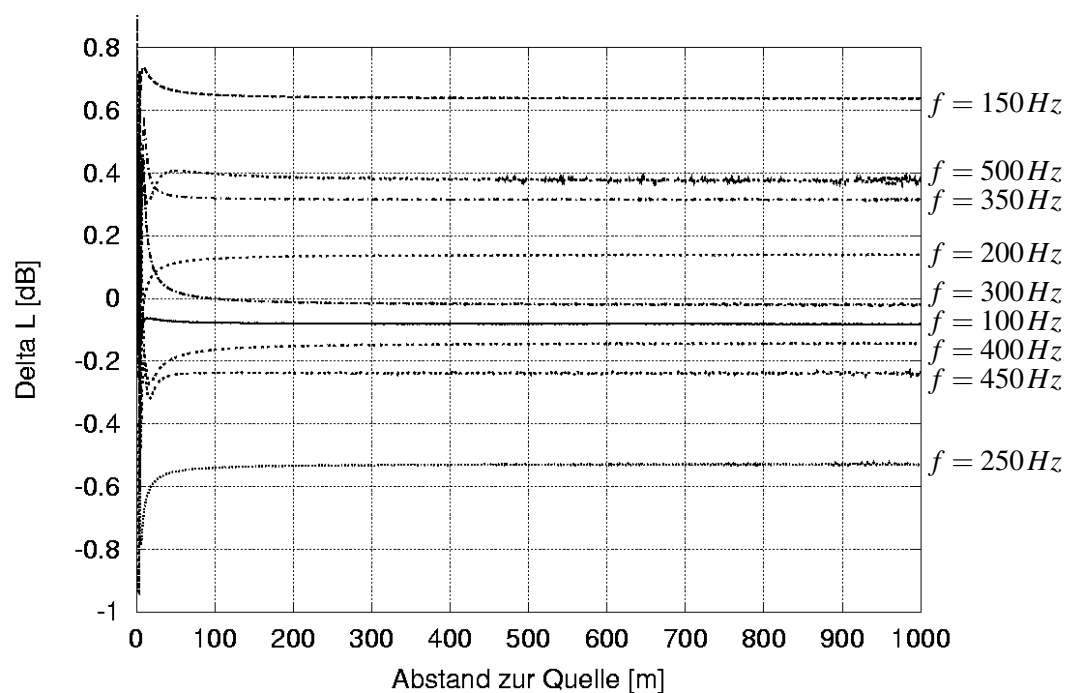


Abbildung 6.3: Pegeldifferenz  $\Delta L$  [dB] zwischen den Berechnungen mit starrer Wand bzw. mit Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Kopplung; Empfängerkette in der Höhe  $h_p = 1,5m$  bis zu  $1000m$  Abstand von der Wand; verschiedene Frequenzen von  $f = 100Hz$  bis  $f = 500Hz$ .

## 6.2 Wirkung von Schallschutzmaßnahmen

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse von Beispielrechnungen vorgestellt und diskutiert, die für verschiedene Schallschutzmaßnahmen durchgeführt werden. Untersucht werden dabei eine Schallschutzmauer, ein Lärmschutzwall und ein Trog, bestehend aus zwei Schallschutzwänden. Die Geometrien der Querschnitte sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Für alle drei Beispielgeometrien ist die Länge der baulichen Maßnahmen auf  $l = 5\text{ m}$  begrenzt. Dadurch sind außer an den oberen Kanten der Schallschutzkonstruktionen auch an den Seiten nicht unerhebliche Beugungseffekte zu erwarten.

Die Anregung erfolgt in Form einer punktförmigen Schallquelle. Diese wird in der Höhe  $h_Q = 1\text{ m}$  und im konstanten horizontalen Abstand von  $3\text{ m}$  mittig zur jeweiligen Schallschutzkonstruktion angesetzt. Die Anregung durch die Schallquelle erfolgt in drei Frequenzen von  $f = 50\text{ Hz}$ ,  $f = 200\text{ Hz}$  und  $f = 500\text{ Hz}$ . Die Empfängerpunkte liegen jeweils in der Höhe  $h_P = 1,6\text{ m}$  im horizontalen Abstand bis zu  $1000\text{ m}$  von der Quelle.

Es wird die Ausbreitung in einer Atmosphäre mit linearem Schallgeschwindigkeitsprofil betrachtet, die Schallgeschwindigkeit am Boden beträgt  $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , der Gradient  $a$  des Profils ist variabel. Dabei wird zwischen einer homogenen Atmosphäre ( $a = 0$ ) sowie zwei abwärts refraktierenden Situationen mit  $a = 0,05 \frac{1}{\text{s}}$  bzw.  $a = 0,1 \frac{1}{\text{s}}$  unterschieden.

Für die Diskretisierung wird die Symmetrie bezüglich der Querschnittsebene genutzt. Der Boden wird als schallharte Ebene modelliert. Daher wird für die BEM-Berechnungen die Halbraum-Fundamentallösung aus Gleichung (3.17) verwendet.

Die Simulation erfolgt für alle gezeigten Beispiele dreidimensional und wird als gekoppelte Rechnung (BEM-Strahlenverfahren) durchgeführt, wie in Kapitel 5 ausführlich beschrieben. Nur für den Fall einer homogenen Atmosphäre wird das hybride Verfahren durch eine einfache Randelementrechnung ersetzt. Als Kopplungsmethode wird das auf der indirekten Randelementmethode basierende Verfahren aus Abschnitt 5.3 verwendet. Das dafür benötigte Interface wird als Rechteckfläche mit den Abmessungen  $l \times h = 15\text{ m} \times 10\text{ m}$  für alle drei Frequenzen ausreichend fein diskretisiert. Die Berechnung des Randelementmodells benötigt für die drei Beispielgeometrien zwischen zwei und fünf Minuten Rechenzeit auf einem SUN SPARK III Prozessor mit  $900\text{ MHz}$ . Die Rechenzeit der Kopplungsrechnung bewegt sich für die gezeigten Beispiele in ähnlicher Größenordnung.

Bei den Ergebnisdarstellungen für das hybride Verfahren müssen die Empfänger einen gewissen Abstand zur Quelle einhalten, was durch den Berechnungsalgorithmus des implementierten Strahlenverfahrens bedingt ist (siehe Abschnitt 4.2).

In Abbildung 6.5 wird die Situation einer refraktierenden Atmosphäre über schallhartem Boden betrachtet, im Gegensatz zu den folgenden Abschnitten jedoch ohne Hindernisse. Daher reicht für dieses Beispiel eine Berechnung allein mit dem Strahlenverfahren aus. Der Gradient des effektiven Schallgeschwindigkeitsprofils wird zu  $a = 0,1 \frac{1}{\text{s}}$  gewählt, die Anregungsfrequenz beträgt  $f = 1000\text{ Hz}$ . Die drei Kurven repräsentieren unterschiedliche Kombinationen von Quell- bzw. Empfängerhöhen. Es ist zu erkennen, dass sich auf Grund der Refraktion Zonen destruktiver Interferenz ausbilden. Diese sind für die kleinere Empfängerhöhe  $h_P = 1,8\text{ m}$  nicht so stark ausgeprägt. Der Schalldruckpegel für  $h_P = 1,8\text{ m}$  liegt im Mittel über den beiden anderen Kurven, da sich die von der Quelle ausgesandte Energie in Bodennähe bündelt.



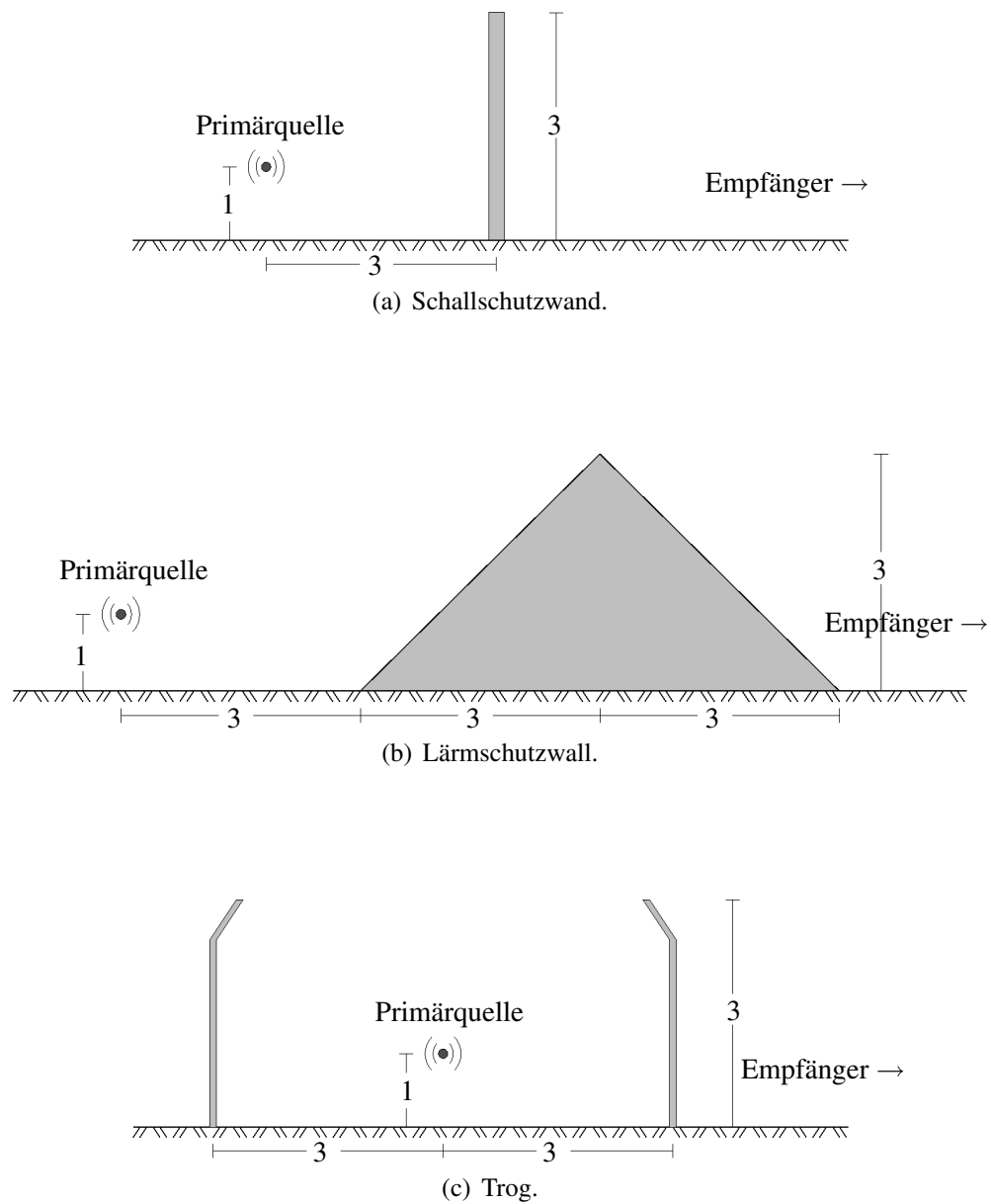


Abbildung 6.4: Querschnitte der untersuchten Schallschutzmaßnahmen; Abmessungen in [m].

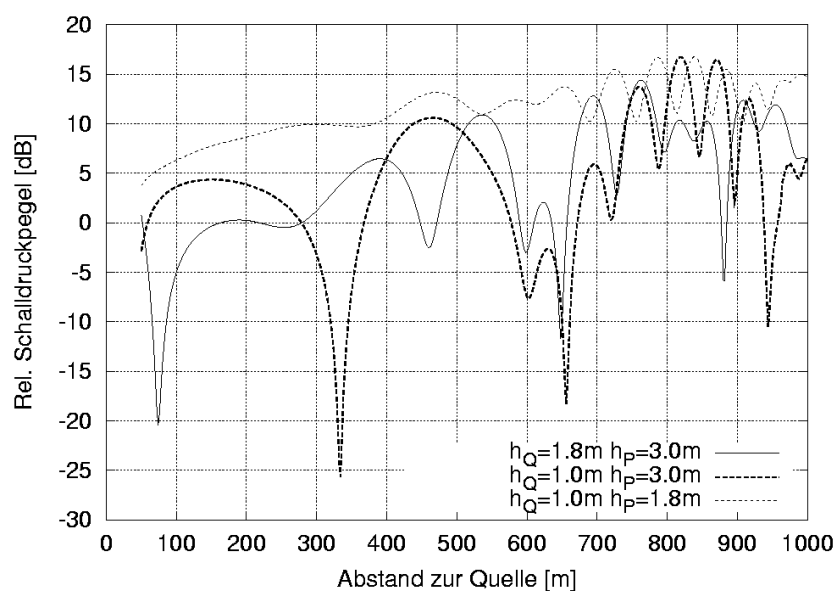


Abbildung 6.5: Refraktierender Atmosphäre ( $a = c'_{eff}(z) = 0, 1 \frac{1}{s}$ ) über schallhartem Boden ohne Hindernis; drei Kombinationen von Quellhöhe  $h_Q$  und Empfängerhöhe  $h_P$ .

### 6.2.1 Schallschutzwand

Die häufigsten baulichen Maßnahmen gegen Lärm sind Schallschutzwände. Ihre Höhe ist aus statischen und optischen Gründen begrenzt und beträgt typischerweise  $2\text{ m}$  bis  $4\text{ m}$ . Die eingesetzten Materialien bzw. Oberflächen variieren von Beton und Mauerwerk über Holz bis hin zu Aluminium oder Plexiglas.

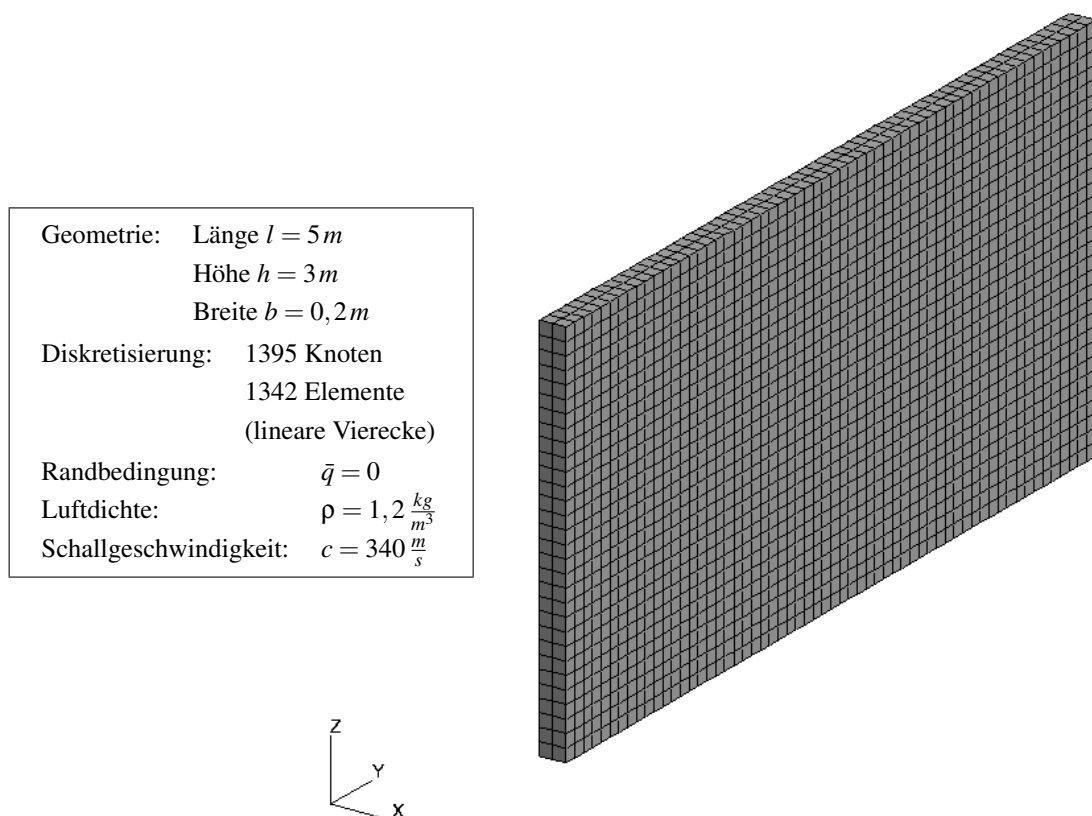


Abbildung 6.6: Diskretisierung der Schallschutzwand.

Für die Berechnung wird die Schallschutzwand mit den Abmessungen aus Abb. 6.4(a) herangezogen. Die Diskretisierung für die Randelement-Berechnung ist in Abb. 6.6 dargestellt.

In Abb. 6.7 ist zunächst eine homogene Atmosphäre betrachtet, in der also keine Refraktion stattfindet. Dargestellt ist der Schalldruckpegel für die Situation mit Mauer. Die drei Kurven repräsentieren die unterschiedlichen Frequenzen. Die Referenzgröße für den Schalldruckpegel ist hierbei der Schalldruck im Freifeld gewählt, d.h. der Schalldruck, der sich ohne Berücksichtigung von Boden und Mauer ergibt.

Der relative Schalldruckpegel in Abb. 6.7 setzt sich bei dieser Wahl des Referenzdrucks aus zwei Effekten zusammen, dem „Bodeneffekt“ und dem „Abschirmeffekt“ des Hindernisses.

Als Bodeneffekt wird hier die Änderung des Schallfeldes durch die Berücksichtigung des Bodens als Reflexionsfläche bezeichnet. Außer an denjenigen Stellen, wo destruktive Interferenz

durch die Reflexion auftritt, erhöht sich der Schalldruck im Vergleich zum Freifeld um einen konstanten Wert von ca.  $6\text{ dB}$ , unabhängig von der Frequenz.

Der Abschirmeffekt dagegen bewirkt in der Regel eine Reduktion des Schalldruckpegels. Die Abschirmwirkung ist jedoch stark abhängig von der Frequenz. Hohe Frequenzen werden besser abgeschirmt als niedrige Frequenzen (vgl. Abschnitt 2.3.2).

Die Ergebnisse in Abb. 6.7 verdeutlichen die unterschiedlich starke Beugungswirkung für die drei verschiedenen Frequenzen. Für die höchste Frequenz von  $f = 500\text{ Hz}$  ist die Abschirmwirkung sehr gut (vgl. auch Abbildungen 2.4 und 2.5) und überwiegt den Bodeneffekt, sodass sich der relative Schalldruckpegel im negativen Bereich bewegt. Für die niedrigste Frequenz  $f = 50\text{ Hz}$  ist die Abschirmwirkung geringer als die Schalldruckerhöhung durch den Bodeneffekt.

In den folgenden Darstellungen werden die jeweiligen Ergebnisse für die Schalldruckamplitude auf verschiedene Referenzschalldrücke bezogen, um unterschiedliche Effekte sichtbar zu machen. Den Abbildungen 6.8, 6.10 und 6.11 liegen dieselben Ergebnisdaten für den Verlauf der Schalldruckamplitude zugrunde.

Als zusätzlicher Einflussfaktor im Vergleich zu Abb. 6.7 kommt in Abb. 6.8 die refraktierende Atmosphäre mit  $a = 0,1 \frac{1}{s}$  hinzu. Der Referenzschalldruck ist wieder der Druck im Freifeld. Es ist im Vergleich zu der vorherigen homogenen Situation zu erkennen, dass der Refraktionseffekt tendenziell für alle Frequenzen mit dem Abstand zur Quelle zunimmt.

Die refraktierende Atmosphäre wird in Abb. 6.9 in abgeschwächter Form mit  $a = 0,05 \frac{1}{s}$  simuliert. Die Kurven weisen für diesen Fall eine etwas geringere Steigung auf, der Refraktionseffekt ist jedoch deutlich sichtbar.

In Abb. 6.10 wird wieder die Ausbreitung in der stärker refraktierenden Atmosphäre betrachtet. Um den Einfluss der Refraktion von anderen Einflüssen getrennt analysieren zu können, ist hier als Referenzdruck der Schalldruck in der homogenen Atmosphäre bei ansonsten gleicher Situation gewählt. Die Kurven für alle Frequenzen zeigen, dass sich der Refraktionseffekt bei geringem Abstand des Empfängers von der Quelle kaum auswirkt: Extrapoliert man die Verläufe der drei Kurven für  $x \rightarrow 0$ , dann nähern sich diese an die Lösung bei homogener Atmosphäre an ( $\Delta L \rightarrow 0$ ). Im Vergleich zu Abb. 6.8 ergibt sich der geringste relative Schalldruckpegel nicht für  $f = 500\text{ Hz}$ , sondern für  $f = 50\text{ Hz}$ . Die Ursache liegt darin, dass die bei dieser Frequenz sehr hohe Abschirmwirkung auch in der Bezugsgröße enthalten ist und somit in dieser Darstellung nicht berücksichtigt wird.

In Abb. 6.11 ist die Abnahme des Schalldrucks mit zunehmendem Abstand von der Quelle zu erkennen, die sich durch die Divergenz der Schallwellen ergibt. Es wird ein konstanter Referenzschalldruck gewählt, um die Divergenz mit in der Darstellung zu berücksichtigen. Dieser Referenzschalldruck ist der Freifelddruck in  $1\text{ m}$  Abstand von der Quelle (siehe Abschnitt 2.4.2). Der abnehmende Verlauf für steigenden Abstand zur Quelle ist auch für die hier angenommene refraktierende Atmosphäre zu erkennen, jedoch wird dieser im Vergleich zur Ausbreitung in homogener Atmosphäre für alle Frequenzen abgeschwächt.

Der unmittelbare Vergleich zwischen homogener und refraktierender Atmosphäre ist in Abb. 6.12 für die Frequenz von  $f = 50\text{ Hz}$  dargestellt.

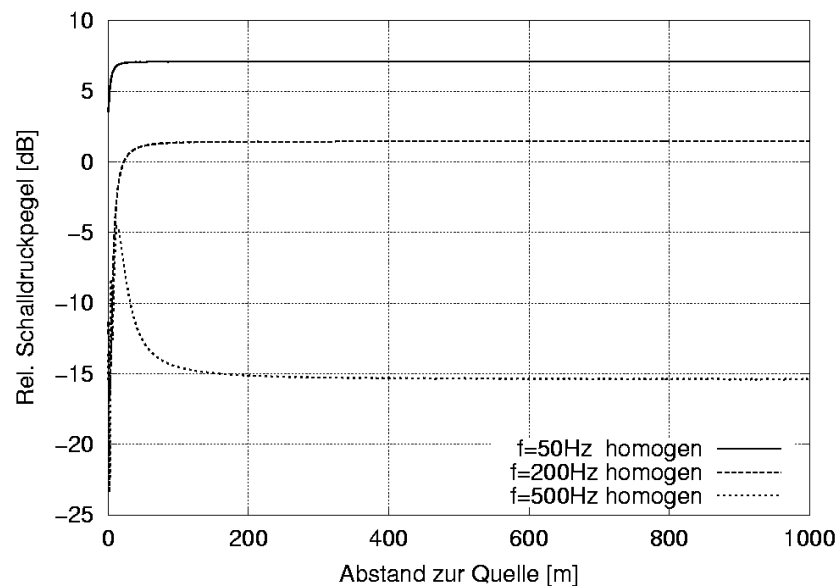


Abbildung 6.7: Relativer Schalldruckpegel für eine homogene Atmosphäre mit Mauer, bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

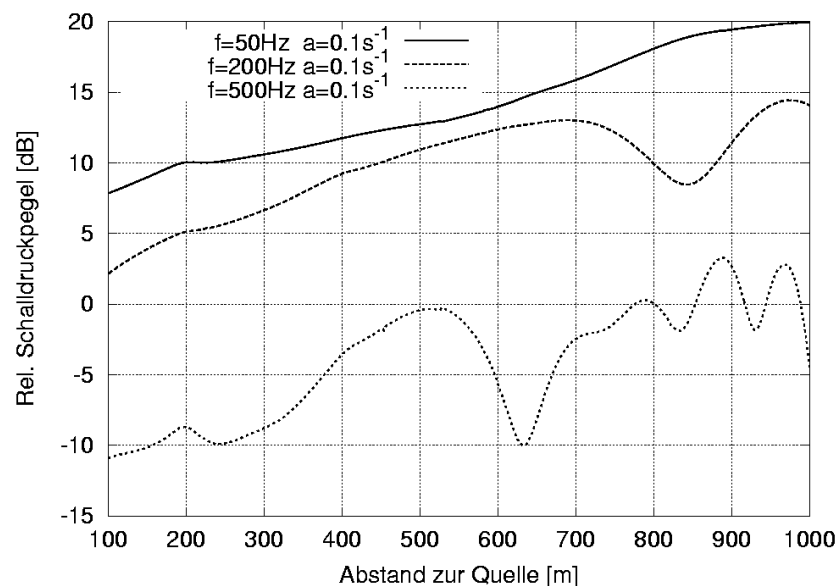


Abbildung 6.8: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

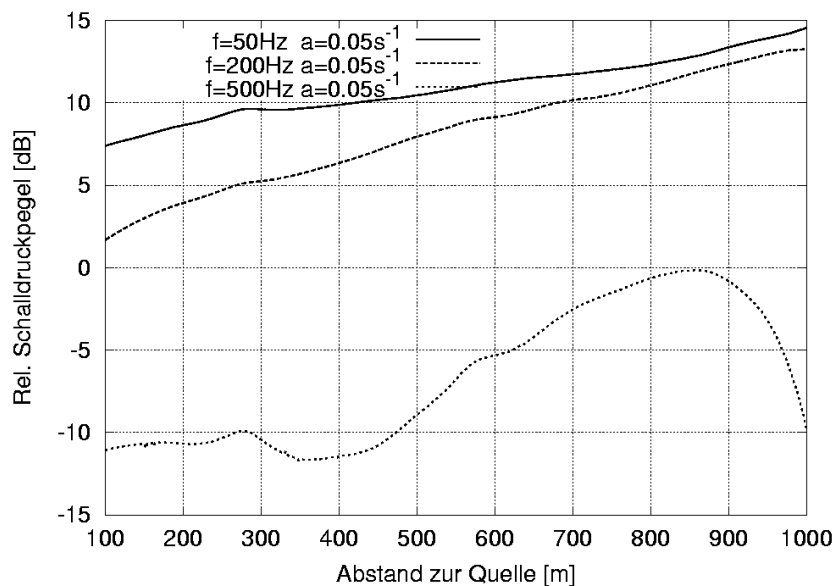


Abbildung 6.9: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,05 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

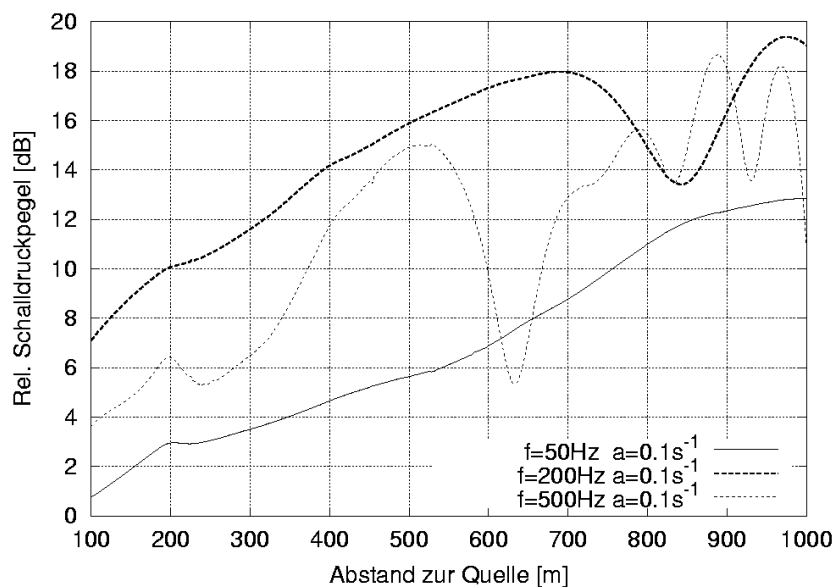


Abbildung 6.10: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck in homogener Atmosphäre mit Mauer.

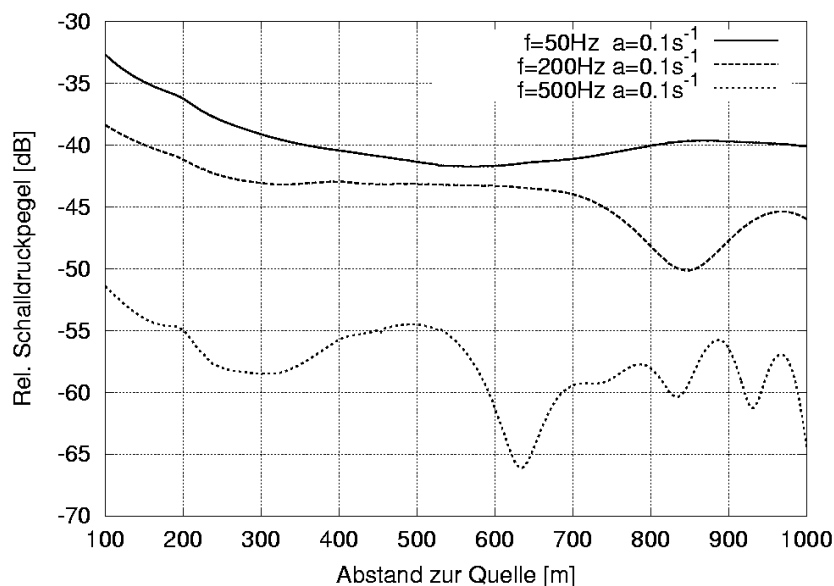


Abbildung 6.11: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck in 1 m Entfernung von der Quelle im Freifeld.

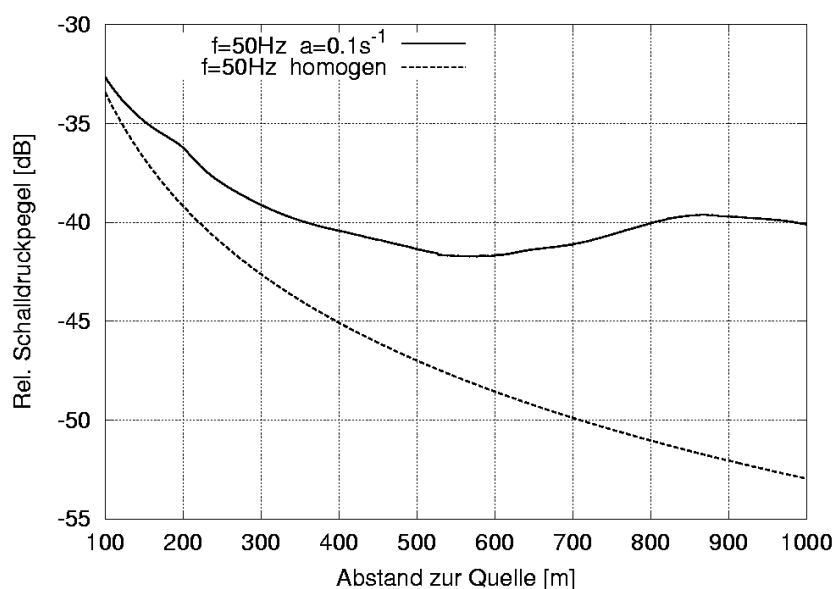


Abbildung 6.12: Relativer Schalldruckpegel für eine homogene ( $a = 0$ ) und eine refraktierend Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ) bei  $f = 50\text{Hz}$ , bezogen auf den Schalldruck in 1 m Entfernung von der Quelle im Freifeld.

### 6.2.2 Lärmschutzwall

Eine weitere bauliche Schallschutzmaßnahme stellt der Lärmschutzwall dar, der im folgenden Abschnitt untersucht wird. Die Höhe ist zu Vergleichszwecken identisch zur Höhe der Schallschutzwand aus Abschnitt 6.2.1. Der berechnete Wall besitzt einen dreieckigen Querschnitt, die Steigung beträgt auf beiden Seiten  $45^\circ$ , die maximale Breite des Walls von Fuß zu Fuß beträgt  $6\text{ m}$ . Die Geometrie kann der Abb. 6.4(b) entnommen werden, die Diskretisierung der Oberfläche für die Randelementmethode ist in Abb. 6.13 dargestellt. Die Schallquelle wird wie im vorhergehenden Beispiel in horizontalem Abstand des Schutzbauwerks von  $3\text{ m}$  in einer Höhe von  $1\text{ m}$  platziert. Obwohl der Wall üblicherweise aus Erdboden aufgeschüttet und bepflanzt wird, sollen in diesem Beispiel analog zu den Abschnitten 6.2.1 und 6.2.3 alle Oberflächen als schallhart angenommen werden, um einerseits einen Vergleich mit den alternativen Maßnahmen zu ermöglichen und andererseits für die Prognose des Schallpegels auf der ungünstigen Seite zu liegen.

Geometrie:	Länge $l = 5\text{ m}$
	Höhe $h = 3\text{ m}$
	max. Breite $b = 6\text{ m}$
Diskretisierung:	2697 Knoten
	2607 Elemente
	(lineare Vierecke)
Randbedingung:	$\bar{q} = 0$
Luftdichte:	$\rho = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Schallgeschwindigkeit:	$c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

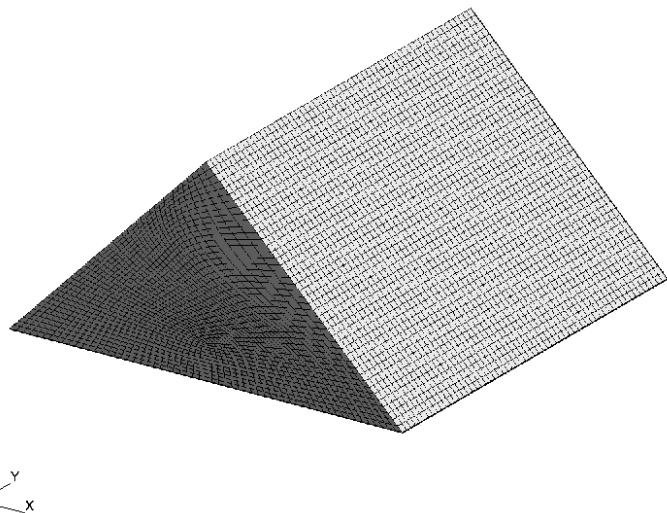


Abbildung 6.13: Diskretisierung des Lärmschutzwalls.

In Abbildung 6.14 ist für den Lärmschutzwall die unterschiedliche Abschirmwirkung für verschiedene Frequenzen zu erkennen. Je höher die Frequenz der Anregung, desto geringer sind die Beugungseffekte. Zwischen den Frequenzen  $f = 50\text{ Hz}$  und  $f = 500\text{ Hz}$  macht dies einen Unterschied von ca.  $12\text{ dB}$  aus.

Auch unter Einbeziehung einer refraktierenden Atmosphäre in Abb. 6.15 mit  $a = 0,1 \frac{1}{\text{s}}$  ist die Abschirmwirkung für die höchste Frequenz am besten. Die Refraktion hat für alle Frequenzen einen mit dem Abstand zur Quelle steigenden Einfluss. Der Anstieg des Schalldruckpegels verläuft für alle betrachteten Frequenzen nahezu parallel.

In Abb. 6.16 wird dieselbe Situation mit Hindernis und Refraktion betrachtet. Durch den Bezug auf die Situation mit Hindernis in homogener Atmosphäre wird die Darstellung im Vergleich zur vorigen Abb. 6.15 jedoch um den Bodeneffekt „bereinigt“, sodass nur der Refraktionseffekt



aufgetragen ist. Dieser ist für alle betrachteten Frequenzen vergleichbar und beträgt für die betrachtete Situation an einem Empfänger im Abstand von  $1000\text{ m}$  zur Quelle etwa  $10$  bis  $14\text{ dB}$ . Auffallend ist für die mittlere Frequenz von  $f = 200\text{ Hz}$  ein ausgeprägtes lokales Minimum des Refraktionseffektes, welches durch destruktive Interferenz von Schallstrahlen zu erklären ist.

Die Refraktion kann bereichsweise zu einem höheren Schalldruckpegel führen als an einem Empfänger, der sich näher zur Quelle befindet. Dies kann z.B. für  $f = 50\text{ Hz}$  Abb. 6.17 entnommen werden, wo sich im betrachteten Empfängerbereich das Minimum des Schalldruckpegels bei etwa  $x = 600\text{ m}$  befindet und sich für weiter von der Quelle entfernte Punkte ein etwas höherer Schalldruck ergibt.

In Abb. 6.18 ist schließlich der Vergleich des Schalldrucks für die homogene und die refraktierende Situation dargestellt. Die Frequenz beträgt in diesem Beispiel  $f = 200\text{ Hz}$ , der konstante Referenzdruck ist der Freifelddruck in  $1\text{ m}$  Entfernung. Die maximale Erhöhung des Schalldruckpegels, die sich durch Berücksichtigung einer inhomogenen Atmosphäre ergibt, beträgt im Empfängerbereich ca.  $9\text{ dB}$ .

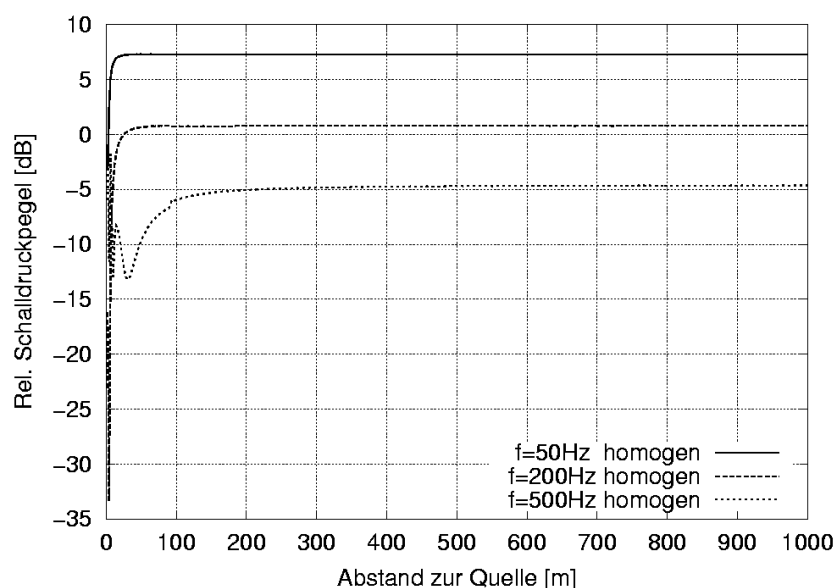


Abbildung 6.14: Relativer Schalldruckpegel für eine homogene Atmosphäre mit Wall, bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

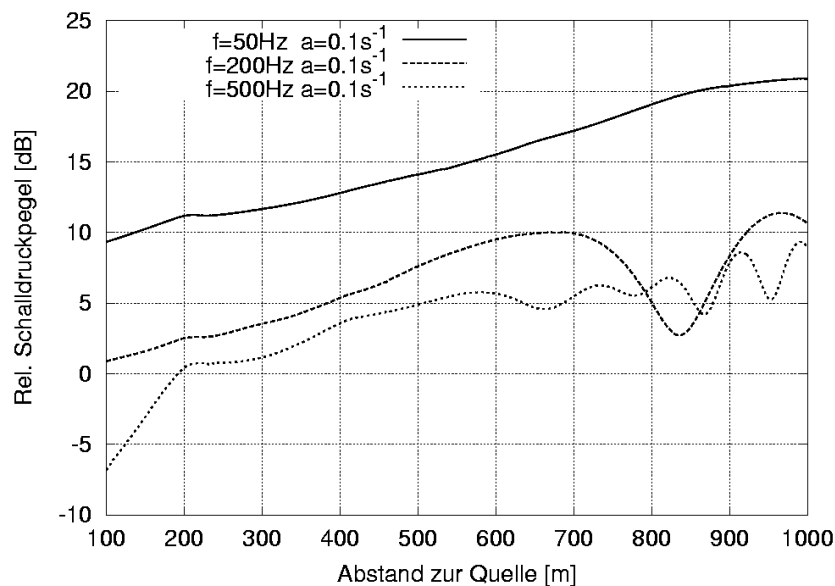


Abbildung 6.15: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

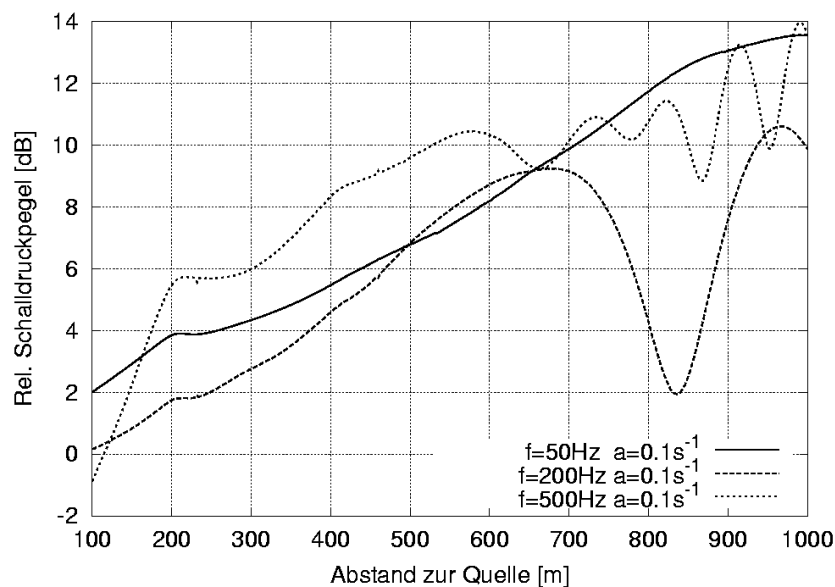


Abbildung 6.16: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck in homogener Atmosphäre mit Wall.

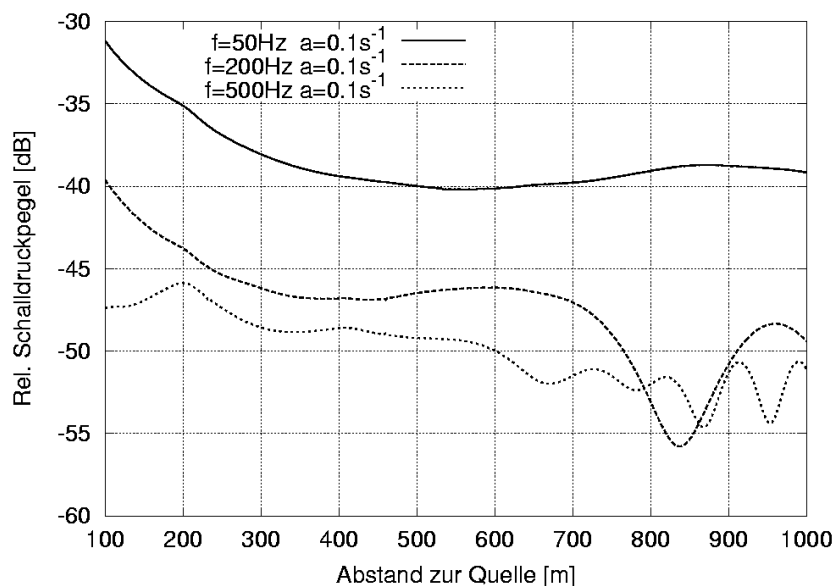


Abbildung 6.17: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{\text{s}}$ ), bezogen auf den Schalldruck in 1 m Entfernung von der Quelle im Freifeld.

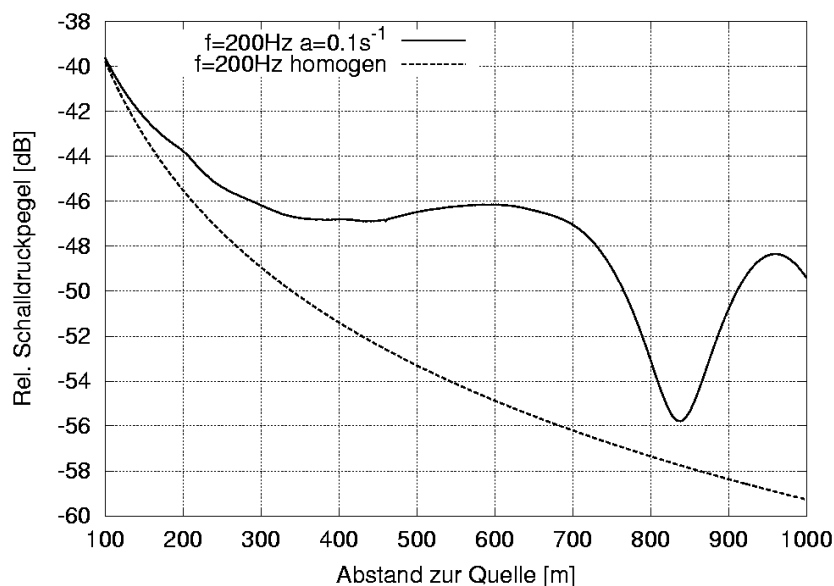


Abbildung 6.18: Relativer Schalldruckpegel für eine homogene ( $a = 0$ ) und eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{\text{s}}$ ) bei  $f = 200 \text{ Hz}$ , bezogen auf den Schalldruck in 1 m Entfernung von der Quelle im Freifeld.

### 6.2.3 Trog

Der hier betrachtete Trog mit dem in Abbildung 6.4(c) dargestellten Querschnitt besteht aus jeweils einer Schallschutzwand auf beiden Seiten der Quelle. Die Diskretisierung ist Abb. 6.19 zu entnehmen. Die dargestellten Ergebnisse für den Trog sind für dieselben Situationen und Referenzdrücke ermittelt wie die Ergebnisse für den Lärmschutzwall in Abschnitt 6.2.2.

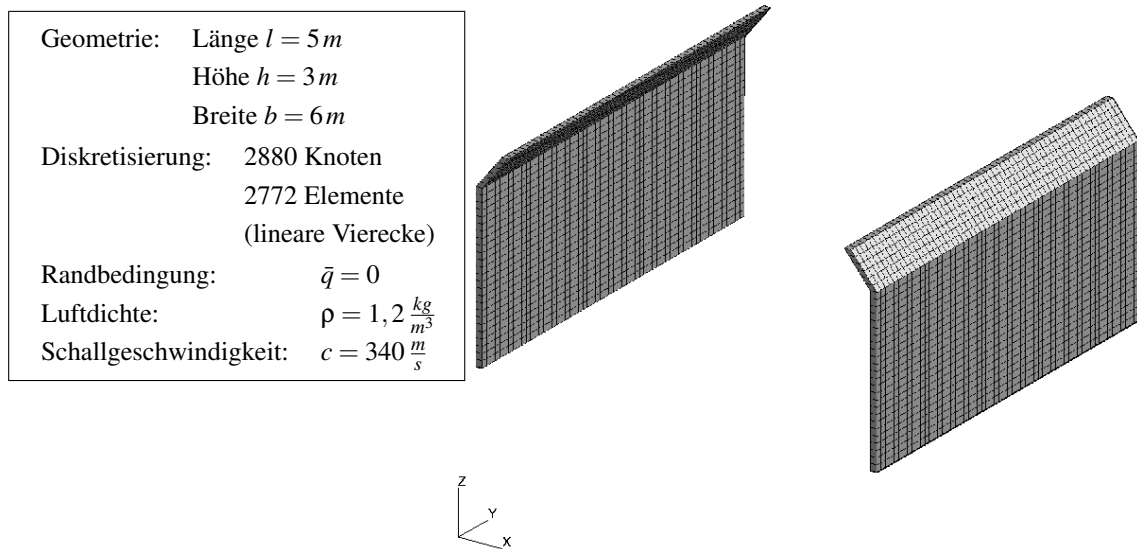


Abbildung 6.19: Diskretisierung des Trogs.

Für die homogene Situation ohne Hindernis in Abb. 6.20 zeigt sich die höchste Abschirmwirkung wiederum bei der höchsten Frequenz  $f = 500\text{ Hz}$ . Interessant ist jedoch, dass durch die Mehrfachreflexion an den Wänden auf beiden Seiten der Schallquelle die niedrige Frequenz  $f = 50\text{ Hz}$  besser abgeschirmt wird als  $f = 200\text{ Hz}$ . Diese erkennbare gegenseitige Auslöschung von direktem und reflektiertem Schallfeld hängt von der Breite bzw. allgemein von der Geometrie des Trogs und der Wellenlänge der Anregungsfrequenz ab.

Bei Berücksichtigung einer refraktierenden Atmosphäre, zeigt sich in Abb. 6.21, dass bei der höchsten Frequenz  $f = 500\text{ Hz}$  der Refraktionseffekt am stärksten mit zunehmender Distanz anwächst. Dadurch wird der größere Abschirmungseffekt bei  $f = 500\text{ Hz}$ , wie er in der vorigen Abb. 6.20 zu erkennen ist, relativiert.

In Abb. 6.22, wo der Refraktionseffekt von der Abschirmwirkung und Bodeneffekt losgelöst dargestellt ist, zeigt sich, dass der Refraktionseffekt für den betrachteten Trog mit der Frequenz ansteigt. Zwischen den Frequenzen  $f = 50\text{ Hz}$  und  $f = 500\text{ Hz}$  ist ein Unterschied von bis zu  $10\text{ dB}$  erkennbar.

Die Verläufe des Schalldruckpegels in Abb. 6.23 sind im Vergleich zu Abb. 6.21 lediglich um den Divergenzeffekt erweitert und daher qualitativ gleich.

In Abb. 6.24 ist für die höchste Frequenz  $f = 500\text{ Hz}$  dargestellt, wie sich beim betrachteten Trog die Berücksichtigung der Refraktion schon bei geringem Abstand von der Quelle bemerk-

bar macht.

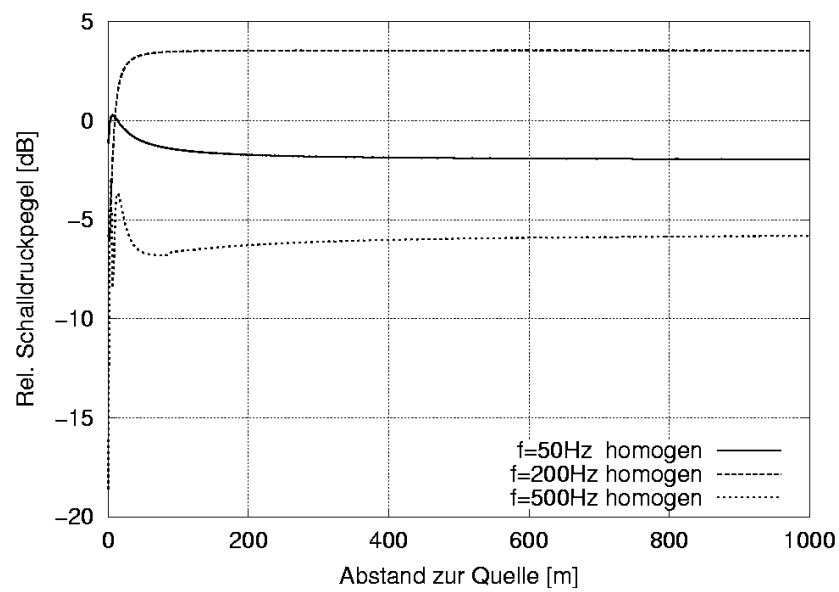


Abbildung 6.20: Relativer Schalldruckpegel für eine homogene Atmosphäre mit Trog, bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

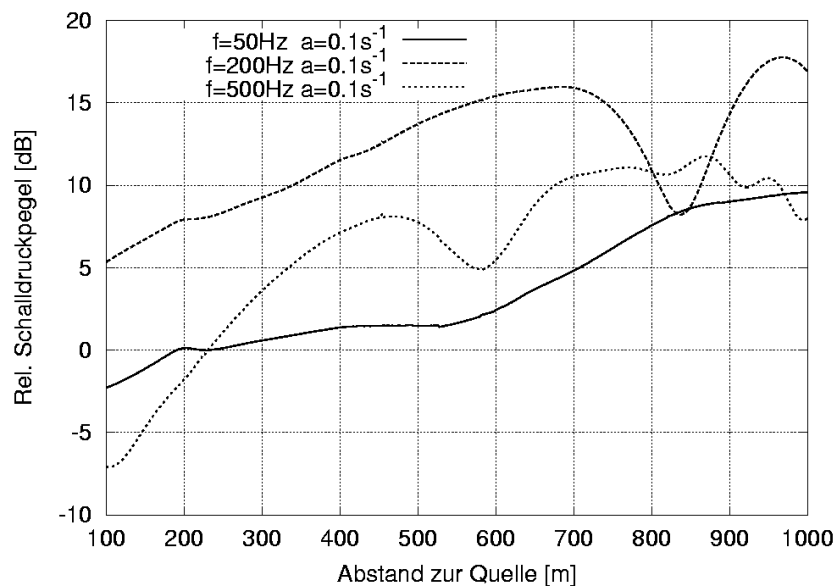


Abbildung 6.21: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck im Freifeld.

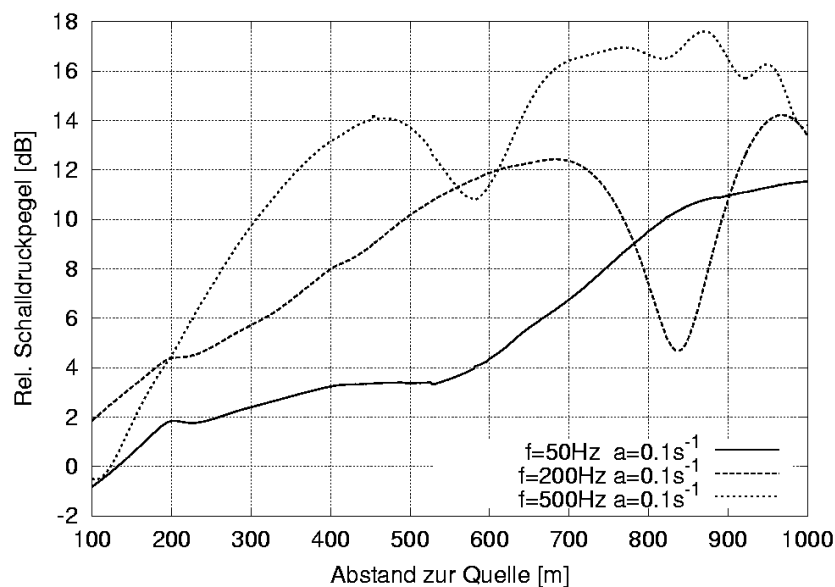


Abbildung 6.22: Relativer Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck in homogener Atmosphäre mit Trog.

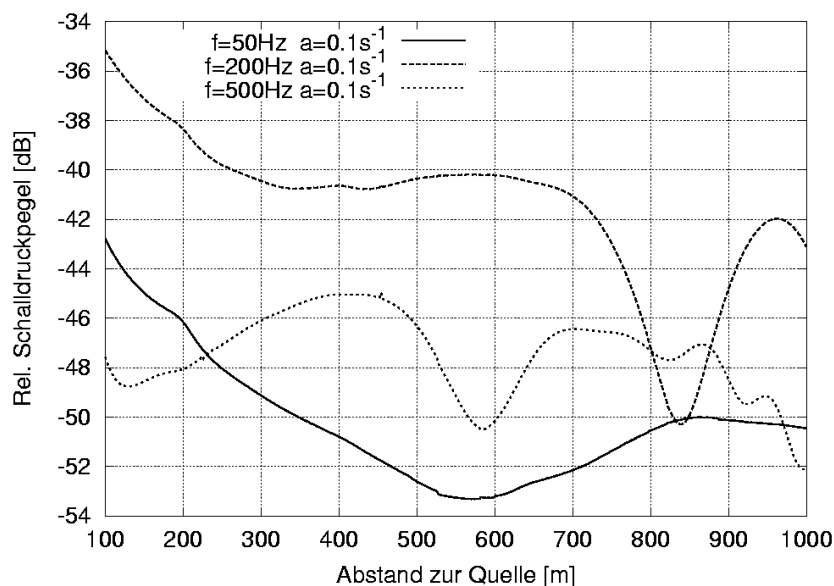


Abbildung 6.23: Schalldruckpegel für eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ), bezogen auf den Schalldruck in 1 m Entfernung von der Quelle im Freifeld.

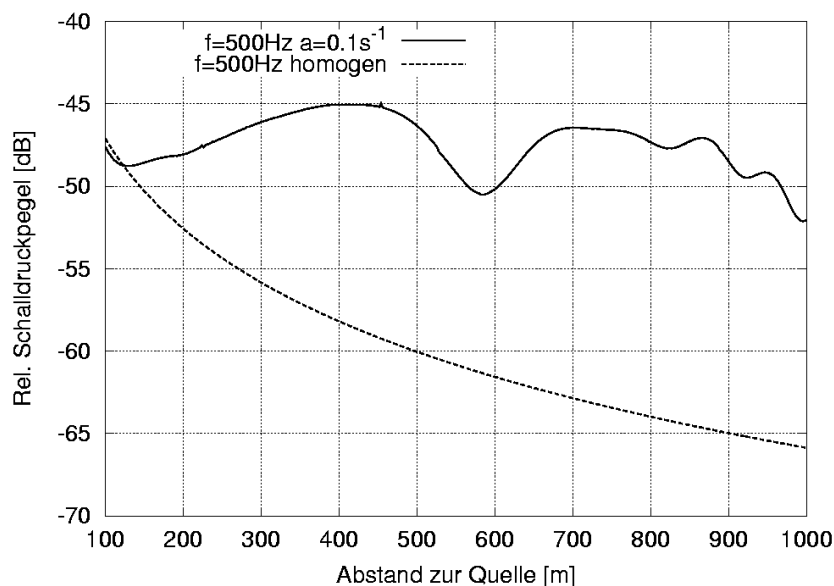


Abbildung 6.24: Relativer Schalldruckpegel für eine homogene ( $a = 0$ ) und eine refraktierende Atmosphäre ( $a = 0,1 \frac{1}{s}$ ) bei  $f = 500\text{Hz}$ , bezogen auf den Schalldruck in 1 m Entfernung von der Quelle im Freifeld.

### 6.2.4 Vergleich der Schallschutzmaßnahmen

Vergleicht man die Wirkung der untersuchten Schallschutzmaßnahmen, dann lassen sich daraus einige Erkenntnisse gewinnen. Die Abschirmwirkung ist für hohe Frequenzen deutlich stärker als für niedrige, da der Beugungseffekt wesentlich geringer ist. Ausnahmen können beim Trog durch die mehrfache Reflexion bei einzelnen Frequenzen auftreten, wo destruktive Interferenz der direkten und reflektierten Schallfelder zu einer Reduktion des Schalldruckpegels führt und den Abschirmeffekt dadurch unterstützt.

Bei der Abschirmwirkung gegen Lärm in höheren Frequenzen zeigt die Schallschutzwand ein deutlich besseres Verhalten als die beiden Alternativmaßnahmen. Sie ist dem Lärmschutzwall in diesem Punkt überlegen, da sie als vertikales Bauwerk näher an der Quelle platziert werden kann, während der Wall durch seine flachere Steigung sich für größere Höhen von der Quelle entfernt und die Reflexion des Direktschalls unter geringerem und somit ungünstigerem Einfallswinkel stattfindet. Der Trog schützt zwar auf beiden Seiten der Quelle die direkte Umgebung, die Mehrfachreflexion führt jedoch auf beiden Seiten über die Frequenzen gemittelt zu einer Erhöhung des Schalldruckpegels im Vergleich zur einfachen Schallschutzwand.

Kennt man beim Trog die Position der Quelle und ihre Hauptfrequenzanteile sehr genau, dann kann man durch Variation der Trogbreite eine konstruktive Überlagerung der Reflexionen vermeiden bzw. eine Auslöschung der wichtigsten Anteile begünstigen.

Der Effekt der Refraktion steigt zumindest bis zum betrachteten Abstand von  $1000\text{ m}$  zur Quelle für alle untersuchten Konstruktionen und Frequenzen tendenziell an. Liegt ein Empfänger in einiger Entfernung von der Quelle und dem Schallschutzbauwerk, so kann dort durch die Refraktion ein höherer Schalldruckpegel entstehen als an einem Empfänger in geringerer Entfernung von der Quelle, wo die Refraktion keinen ausgeprägten Einfluss hat.

Eine ausgeprägte Abhängigkeit des Refraktionseffekts von der Höhe der Frequenz ist aus den Ergebnissen nicht festzustellen. Für die Schallschutzwand und den Lärmschutzwall ist der Einfluss der Refraktion auf die Ergebnisse der kleinsten Frequenz von  $f = 50\text{ Hz}$  am geringsten. Im Fall des Trogs lässt sich dies jedoch nicht bestätigen.

Vergleicht man den Verlauf der Ergebnisse bei einer bestimmten Frequenz für alle drei Schallschutzmaßnahmen, so zeigt sich ein qualitativ ähnlicher Verlauf. Die Lage der lokalen Maxima und Minima des Schalldruckpegels ist demnach maßgeblich durch die Atmosphäre und die Frequenz, nicht durch die Art der Schallschutzkonstruktion bestimmt. Beispielsweise tritt für die Frequenz von  $f = 200\text{ Hz}$  für alle untersuchten Schallschutzkonstruktionen ein Einbruch des Schalldruckpegels im Bereich zwischen  $800$  und  $900\text{ m}$  Abstand von der Quelle ein, der nur durch die destruktive Interferenz der eintreffenden Schallstrahlen zu erklären ist. In der Realität jedoch sind diese Einbrüche nicht oder nur sehr abgeschwächt zu erwarten, da die Kohärenz der Schallstrahlen, die auf unterschiedlichen Pfaden den Empfänger erreichen, durch Turbulenz in der Atmosphäre verloren geht.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden verschiedene Ansätze vorgestellt und verfolgt, wie unter Verwendung der Randlelementmethode Effekte bei der Schallausbreitung erfasst werden können, die meteorologische Ursachen haben bzw. von Inhomogenitäten im Medium herrühren. Darüber hinaus wird ein Simulationsmodell entwickelt, welches die Stärken von Randlelementmethode und Strahlenverfahren vereinigt, die weitgehend komplementäre Eigenschaften besitzen und bislang nur alternativ eingesetzt werden.

Die Stärken der Randlelementmethode in der beschriebenen Formulierung liegen in der exakten Erfassung aller Wellenphänomene, wobei in erster Linie die Beugung an Kanten hervorgehoben werden muss. Für die Betrachtung unendlich ausgedehnter Gebiete - wie bei der Schallausbreitung im Freien vorhanden - ist die BEM ebenfalls sehr geeignet, da die SOMMERFELDSche Abstrahlbedingung implizit erfüllt wird. Die Grenzen der Methode liegen im großen Rechenbedarf für hohe Frequenzen, bedingt durch die notwendige Diskretisierungsfeinheit auf dem Rand. Außerdem ist ein inhomogenes Ausbreitungsgebiet mit der BEM nur sehr schwer zu modellieren.

Strahlenverfahren können keine Beugung erfassen und sind damit nicht für die niedrigen Frequenzen des Hörschallbereichs geeignet, wo Beugung eine große Rolle spielt. Dagegen kann das Phänomen der Refraktion infolge einer inhomogenen Atmosphäre berücksichtigt werden, das für größere Ausbreitungsdistanzen einen großen Einfluss auf das Schallfeld hat.

Viele Probleme in der Realität sind dadurch gekennzeichnet, dass in verschiedenen Bereichen sehr unterschiedliche Phänomene bei der Schallausbreitung vorherrschen. Das hier entwickelte hybride Modell behandelt Nahfeld und Fernfeld unterschiedlich und berücksichtigt gezielt die dort dominierenden Effekte. Im Nahfeld um die Schallquelle treten häufig eine komplexe Geometrie, Mehrfachreflexionen und vor allem Beugung an Kanten auf. Hier wird die Randlelementmethode eingesetzt. Daran gekoppelt wird ein Fernfeld, in dem mit Hilfe eines Strahlenverfahrens die Schallausbreitung über größere Entfernungen unter Einfluss von Refraktion berechnet werden kann.

Bei der Betrachtung der jeweils geeigneten numerischen Verfahren für bestimmte Frequenzen tritt ein Bereich von Frequenzen auf, der für beide Methoden nicht unbedingt geeignet ist. Dieser nicht abgedeckte Frequenzbereich wird im Englischen als „frequency gap“ bezeichnet. Bei der beschriebenen Kopplung wird diesem Problem entgegen gewirkt: Die Diskretisierung für

die Randlelementmethode ist nur in einem relativ kleinen Bereich (Nahfeld) erforderlich und das Strahlenverfahren wird nur außerhalb des Nahfelds eingesetzt - also dort, wo eine ebene Topografie angenommen wird und Beugung an Kanten nicht auftritt. Das übliche Kriterium für die Anwendung geometrischer Verfahren, dass die Wellenlänge sehr viel kleiner als die charakteristische Länge von Raum oder Hindernissen sein muss, kann damit aufgehoben werden. Es wird gezeigt, dass das verwendete Strahlenverfahren im Grenzübergang zum homogenen Medium unabhängig von der Frequenz die exakte Lösung liefert.

Für die Kopplung dieser sehr unterschiedlichen Verfahren werden in dieser Arbeit zwei Methoden entwickelt, die - mit der indirekten BEM bzw. einem netzfreien Verfahren - die Verbindung erst ermöglichen. Es wird gezeigt, dass die Kopplung mit den entwickelten Kopplungsmethoden funktioniert. Die Verifikation erfolgt jeweils als Vergleich mit exakten Lösungen. Das gekoppelte Modell wird erfolgreich für die Berechnung der Wirkung von Schallschutzkonstruktionen angewendet. Die Ergebnisse unterstreichen das Fazit vieler Messungen und Studien, dass v.a. die Refraktion über größere Distanzen einen wesentlichen, oft ungünstigen Einfluss hat, der bei der Berechnung nicht vernachlässigt werden darf.

Außer dem in Kapitel 4 erläuterten Strahlenverfahren sind alle in dieser Arbeit verwendeten und hier entwickelten Verfahren sowohl für zweidimensionale als auch für dreidimensionale Probleme einsetzbar und werden im Rahmen dieser Arbeit in Rechenprogrammen implementiert.

Eine wesentliche Vereinfachung und Reduktion des Rechenaufwandes kann für die zukünftige Anwendung der hybriden Methode durch den Einsatz eines 2D-Strahlenverfahrens erzielt werden. Dies kann mit dem Randlelementprogramm in seiner zweidimensionalen Form kombiniert werden. Da viele Schallschutzmaßnahmen entlang von Verkehrswegen wie Autobahnen sehr lang sind, stellt eine Simulation in einem 2D-Modell für diesen Fall eine geeignete Vereinfachung dar.

In dieser Arbeit wird gezeigt und diskutiert, wie meteorologische Effekte bei der Schallausbreitung im numerischen Modell berücksichtigt werden können und welchen Einfluss ihre Berücksichtigung auf die Ergebnisse hat. Insbesondere das gekoppelte Verfahren aus BEM und Raytracing liefert neues Potenzial für die Berechnung der Schallausbreitung im Freien. Mit der hier entwickelten Methode kann die numerische Simulation in der Konstruktionsphase zur Beurteilung von Schallschutzmaßnahmen weiter voran getrieben werden.

# Symbolverzeichnis

$a$	- Quellintensität $[1/s]$ - Gradient der effektiven Schallgeschwindigkeit $[1/s]$
$c$	Schallgeschwindigkeit $[m/s]$
$c_{eff}$	effektive Schallgeschwindigkeit $[m/s]$
$f$	- Frequenz $[Hz] = [1/s]$ - Fokusfaktor $[-]$
$\mathbf{f}$	Lastvektor
$h$	Höhe über dem Boden $[m]$
$i$	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$k$	Wellenzahl $[1/m]$
$l_{char}$	charakteristische Länge $[m]$
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$p$	Schalldruck $[N/m^2]$
$p_{eff}$	effektiver Schalldruck $[N/m^2]$
$p_{ref}$	Referenzschalldruck $[N/m^2]$
$\mathbf{p}$	Vektor der unbekannten Schalldrücke an den Knoten
$q$	Schallfluss $[N/m^3]$
$\mathbf{q}$	Vektor der unbekannten Schallflüsse an den Knoten
$r$	Abstand vom Quellpunkt $[m]$
$t$	Zeit $[s]$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor
$\mathbf{v}$	Vektor der Schallschnelle (Partikelgeschwindigkeit) $[m/s]$
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$\mathbf{C}, \mathbf{D}$	Hilfsmatrizen
$D$	Abstand zweier Schallstrahlen $[m]$
$E_{rel}$	relativer Fehler $[-]$
$G$	Fundamentallösung
$\mathbf{G}, \mathbf{H}$	Einflussmatrizen
$H_i^{(k)}$	HANKEL-Funktion $i$ -ter Ordnung $k$ -ter Art

$J_i$	BESSEL-Funktion $i$ -ter Ordnung erster Art
$K$	Kompressionsmodul $[N/m^2]$
$L$	Schallpegel $[dB]$
$M$	- Anzahl ankommender Schallstrahlen - MACH-Zahl $[-]$
$M_{mol}$	Molmasse des Gases $[kg]$
$\mathbf{M}$	MACH-Vektor
$N$	Ansatzfunktion
$N_I$	Anzahl der Interfaceknoten
$P$	Empfängerpunkt
$P_i$	Innenpunkt
$Q$	Quellpunkt
$R$	- Reflexionsfaktor $[-]$ - allgemeine Gaskonstante $(= 8,314[Nm/K])$
$T$	Temperatur $[K]$
$V$	Strömungsgeschwindigkeit $[m/s]$
$\mathbf{V}_0$	Strömungsvektor
$W_S$	Strömungswiderstand
$Y_i$	BESSEL-Funktion $i$ -ter Ordnung zweiter Art
$Z$	Impedanz $[Ns/m^3]$
$Z_B$	normierte Impedanz des Bodens $[-]$
$Z_F$	charakteristische Impedanz des Fluids $[Ns/m^3]$
$\alpha$	Absorptionsgrad $[-]$
$\beta$	Absorptionskoeffizient $[-]$
$\gamma$	Steigungswinkel von Schallstrahlen $[rad]$
$\delta$	Horizontalabstand $[m]$
$\delta(x)$	DIRAC-Distribution
$\eta$	Verlustfaktor $[-]$
$\theta$	Lotwinkel $[rad]$
$\kappa$	Adiabatenkoeffizient $[-]$
$\lambda$	- Wellenlänge $[m]$ - LAMÉ-Konstante $[-]$
$\mu$	LAMÉ-Konstante $[-]$
$\xi$	- Verschiebungsvektor $[m]$ - Quellpunkt bzw. Kollokationspunkt
$\rho$	Dichte $[kg/m^3]$
$\rho_K$	Krümmungsradius $[m]$
$\sigma$	Durchflusswiderstand $[kPa s/m^2]$

$\tau$	- Zeitintervall [s] - Integrationsvariable
$\phi$	Geschwindigkeitspotenzial [ $m^2/s$ ]
$\omega$	Kreisfrequenz [ $1/s$ ]
$\Gamma$	Rand
$\Delta$	- Änderung, Differenz - LAPLACE-Operator
$\Delta x$	horizontaler Abstand Quelle-Empfänger [ $m$ ]
$\Phi$	Geschwindigkeitspotenzial im Frequenzbereich [ $m^2/s$ ]
$\Omega$	Gebiet
$\Im\{ \}$	Imaginärteil
$\Re\{ \}$	Realteil
$\frac{\partial( )}{\partial t}$	- partielle Zeitableitung - Tangentialableitung
$\frac{\partial( )}{\partial n}$	Normalenableitung
$\frac{\partial( )}{\partial i} = ( )_{,i}$	partielle Ableitung nach $i$
$( )^I$	Wert am Interface
$( \tilde{ } )$	transformierte Größe
$( \hat{ } )$	komplexe Größe im Frequenzbereich



# Literaturverzeichnis

- [1] Ackermann, L.: *Simulation der Schalltransmission durch Wände*. Diss., Mechanik-Zentrum, Technische Universität Braunschweig, 2002.
- [2] Alves, C. J. S.; Valtchev, S. S.: Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **29**, 371–382, 2005.
- [3] Antes, H.: *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidmechanik, Math. Methoden in der Technik* **9**. Teubner Stuttgart, 1988.
- [4] Antes, H.: *Boundary Element Methods in Acoustics*, Chapter Applications in environmental noise, 225–260. Springer Berlin, Wien, New York, 1991.
- [5] Attenborough, K.: Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces. *Journal of Sound and Vibration*, **99**(4), 521–544, 1985.
- [6] Attenborough, K.; Taherzadeh, S.: Benchmark cases for outdoor sound propagation models. *Journal of the Acoustical Society of America*, **97**(1), 173–191, 1995.
- [7] Baaran, J.: *Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern*. Diss., Mechanik-Zentrum, Technische Universität Braunschweig, 1999.
- [8] Bathe, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1996.
- [9] Beer, G.: *Programming the Boundary Element Method - An Introduction for Engineers*. Wiley, 2001.
- [10] Björk, E. A.: A Simple Statistical Curved Ray Model for Noise Under Downward Refracting Conditions. *Acta acustica*, **91**, 389–391, 2005.
- [11] Bletzinger, K.-U.; Bischoff, M.; Ramm, E.: A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers and Structures*, **75**, 321–334, 2000.
- [12] Blumrich, R.; Heimann, D.: Numerical Estimation of Atmospheric Approximation Effects in Outdoor Sound Propagation Modelling. *Acta acustica*, **90**, 24–37, 2004.

- [13] Bonnet, M.: *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. John Wiley & Sons Ltd., 1995.
- [14] Brebbia, C.; Telles, J. C. F.; Wrobel, L. C.: *Boundary Elements Techniques*. Springer, 1984.
- [15] Brebbia, C. A.; Dominguez, J.: *Boundary elements - An introductory course*. Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill book company, 1989.
- [16] Cederfeldt, L.: *On the use of finite element method on some acoustical problems*. Swedish Council for Building Research, Stockholm, 1979.
- [17] Chandler-Wilde, S. N.; Hothersall, D. C.: Efficient calculation of the Green function for acoustic propagation above a homogeneous impedance plane. *Journal of Sound and Vibration*, 1995.
- [18] Cisilino, A. P.; Sensale, B.: Optimal Placement of the Source Points for Singular Problems in the Method of Fundamental Solutions. In *Advances in Boundary Element Techniques II*, Hoggar Press, 2001.
- [19] Ciskowski, R. D.; Brebbia, C. A.: *Boundary element methods in acoustics*. Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, 1991.
- [20] Clasen, D.; Langer, S.; Schanz, M.: Efficient Simulation of Sound Insulation in Architectural Acoustics. In *Proceedings of CFA/DAGA '04*. CFA, DEGA, 2004.
- [21] Cremer, L.; Möser, M.: *Technische Akustik*. Springer, VDI-Buch, Berlin, 2003.
- [22] de Lacerda, L. A.; Wrobel, L. C.; Mansur, W. J.: A boundary integral formulation for two-dimensional acoustic radiation in a subsonic uniform flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, **100**, 98–107, 1996.
- [23] Delany, M. E.; Bazley, E. N.: Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, **3**, 105–116, 1970.
- [24] Embleton, T. F. W.: Tutorial on sound propagation outdoors. *Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(1), 31–48, 1996.
- [25] Fairweather, G.; Karageorghis, A.; Martin, P. A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **27**, 759–769, 2003.
- [26] Fischer, M.; Gaul, L.: Application of the Fast BEM for Structural-Acoustic Simulations. *Journal of Computational Acoustics*, **13**(1), 87–98, 2005.
- [27] Gaul, L.; Fiedler, C.: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg, 1979.



- [28] Hallberg, B.; Larsson, C.; Israelsson, S.: Numerical ray tracing in the atmospheric surface layer. *Journal of the Acoustical Society of America*, **104**(4), 2077–2083, 1998.
- [29] Hothersall, D. C.; Chandler-Wilde, S. N.; Hajmirzae, M. N.: Efficiency of single noise barriers. *Journal of Sound and Vibration*, **146**(2), 303–322, 1998.
- [30] Kravtsov, Y. A.: The new asymptotic methods in the theory of wave propagation in inhomogeneous media (review). *Sov. Phys. Acoust.*, **14**, 1–17, 1968.
- [31] Kurtze, G.; Schmidt, H.; Westphal, W.: *Physik und Technik der Lärmbekämpfung*. Verlag G. Braun Karlsruhe, 1975.
- [32] Lamancusa, J. S.; Daroux, P. A.: Ray tracing in a moving medium with two-dimensional sound-speed variation and application to sound propagation over terrain discontinuities. *Journal of the Acoustical Society of America*, **93**(4), 1716–1726, 1993.
- [33] Langer, S.: *Schalltransmission durch Isolierverglasung*. Diss., Mechanik-Zentrum, Technische Universität Braunschweig, 2001.
- [34] Langer, S.; Antes, H.: Analyses of Sound Transmission through Windows by coupled Finite and Boundary Element Methods. *Acta Acustica united with Acustica*, **89**, 78–85, 2003.
- [35] Li, K. M.; Taherzadeh, S.; Attenborough, K.: An improved ray-tracing algorithm for predicting sound propagation outdoors. *Journal of the Acoustical Society of America*, **104**(4), 2077–2083, 1998.
- [36] Li, K. M.; Wang, Q.: A BEM approach to assess the acoustic performance of noise barriers in a refracting atmosphere. *Journal of Sound and Vibration*, **211**(4), 663–681, 1998.
- [37] Ludwig, D.: Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **19**, 215–250, 1966.
- [38] Meyer, E.; Neumann, E.-G.: *Physikalische und Technische Akustik*. Springer, 1979.
- [39] Morse, P. M.; Ingard, K. U.: *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, McGraw-Hill Inc., 1968.
- [40] Netlib-Software-Bibliothek: MINPACK. URL: <http://www.netlib.org/minpack/>, Chicago, USA, 2005.
- [41] Pierce, A. D.: *Acoustics - An Introduction to its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1981.
- [42] Piercy, J. E.; Embleton, T. F. W.; Sutherland, L. C.: Review of noise propagation in the atmosphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, **61**(6), 1403–1418, 1977.

- [43] Premat, E.; Defrance, J.; Priour, M.; Aballea, F.: Coupling BEM and GFPE for complex outdoor sound propagation. In *Proceedings of Euronoise 2003*, 2003.
- [44] Salomons, E. M.: Downwind propagation of sound in an atmosphere with a realistic sound-speed profile: A semianalytical ray model. *Journal of the Acoustical Society of America*, **95**(5), 2425–2436, 1994.
- [45] Salomons, E. M.: Noise barriers in a refracting atmosphere. *Applied Acoustics*, **47**(3), 217–238, 1996.
- [46] Salomons, E. M.: Caustic diffraction fields in a downward refracting atmosphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, **104**(6), 3259–3272, 1998.
- [47] Salomons, E. M.: *Computational atmospheric acoustics*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [48] Seybert, A. F.; Soenarko, B.: Radiation and Scattering of Acoustic Waves from Bodies of Arbitrary Shape in a Three-Dimensional Half Space. *Journal of Sound and Vibration*, **110**, 112–117, 1998.
- [49] Skudrzyk, E.: *Die Grundlagen der Akustik*. Springer, 1954.
- [50] Sommerfeld, A.: *Partielle Differentialgleichungen in der Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1978.
- [51] Stein, J. A.: *Physik für Bauingenieure - Band 1: Schall*. AVH - Verlag Hamburg, 1997.
- [52] Tam, C. K. W.; Webb, J. C.: Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, **107**, 262–281, 1992.
- [53] Tröndle, G.: *Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode*. Diss., Mechanik-Zentrum, Technische Universität Braunschweig, 1995.
- [54] Tsuji, T.; Tsuchiya, T.; Kagawa, Y.: Finite element and boundary element modelling for the acoustic wave transmission in mean flow medium. *Journal of Sound and Vibration*, **255**, 849–866, 2002.
- [55] van Renterghem, T.; Botteldooren, D.: Numerical simulation of the effect of trees on downwind noise barrier performance. *Acta Acustica united with Acustica*, **89**, 764–778, 2003.
- [56] VDI-Richtlinie 2714: *Schallausbreitung im Freien*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1988.
- [57] von Estorff, O.: *Boundary Elements in Acoustics*. WIT Press, 2000.
- [58] Walker, R.: Acoustic modelling - approximations to the real world. *White Paper WHP 005*. BBC, 2001.

- [59] Wrobel, L. C.: *The boundary element method - Vol. 1: Applications in thermo-fluids and acoustics*. Wiley, 2002.
- [60] Wu, T. W.: *Boundary Element Acoustics - Fundamentals and Computer Codes*. WIT Press, 2001.
- [61] Wu, T. W.; Lee, L.: A direct boundary integral formulation for acoustic radiation in a subsonic uniform flow. *Journal of Sound and Vibration*, **175**, 51–63, 1994.
- [62] Zhang, P.; Wu, T. W.; Lee, L.: A coupled FEM/BEM formulation for acoustic radiation in a subsonic non-uniform flow. *Journal of Sound and Vibration*, **192**(1), 333–347, 1996.
- [63] Zienkiewicz, O.C.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, USA, 1977.

# Braunschweiger Schriften zur Mechanik – BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1–1990 Plonski, Thomas:  
Dynamische Analyse von schnelldrehenden Kreiszylinderschalen
- 2–1991 Wegener, Konrad:  
Zur Berechnung grosser plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Über-  
spannungstyp
- 3–1992 Gröhlich, Hubert:  
Finite-Element-Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle oh-  
ne explizite Fliessflächenformulierung
- 4–1992 Hesselbarth, Hanfried:  
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädigung  
mit dem Prinzip der zellulären Automaten
- 5–1992 Schlums, Hartmut:  
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem  
Verhalten metallischer Werkstoffe
- 6–1992 Kublik, Frithjof:  
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein- und mehrachsigen Versuchsführungen  
im Hochtemperaturbereich
- 7–1992 Bechtloff, Jürgen:  
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen
- 8–1993 Müller, Michael:  
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbau-  
ten
- 9–1993 Senker, Peter:  
Stabilitätsanalyse elastischer RotorsystemeStabilitätsanalyse elastischer Rotorsyste-  
me
- 10–1993 Cheng, Weimin:  
Schallabstrahlung einer schwingenden Reisner/Mindlin Platte
- 11–1993 Wiebe, Thomas:  
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Randintegralglei-  
chungen
- 12–1993 Hahne, Matthias:  
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopischen  
Stoffgesetz

- 13–1993 Heisig, Gerald:  
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich gekrümmten Bohrlöchern
- 14–1994 de Araújo, Francisco Célio:  
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode
- 15–1994 Kristen, Martin:  
Untersuchungen zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik
- 16–1994 Latz, Kersten:  
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern und Baugrund
- 17–1994 Jäger, Monika:  
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen
- 18–1994 August, Martin:  
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt
- 19–1995 Erbe, Matthias:  
Zur Simulation von Risswachstum in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente
- 20–1995 Gerdes, Ralf:  
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich
- 21–1995 Tröndle, Georg:  
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode
- 22–1996 Degenhardt, Richard:  
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund
- 23–1996 Feise, Hermann Josef:  
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern
- 24–1996 Haubrok, Dietmar:  
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2-D Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM-Matrizen
- 25–1996 Lehmann, Lutz:  
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten

- 26–1996 Klein, Ralf:  
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitzten
- 27–1996 Kopp, Thilo:  
Simulation grosser inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen
- 28–1997 Harder, Jörn:  
Simulation lokaler Fliessvorgänge in Polykristallen
- 29–1997 Lewerenz, Malte Christian:  
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten
- 30–1997 Meywerk, Martin:  
Stabilität und Verschleiss bei auf Schienen laufenden Eisenbahnwheelsätzen
- 31–1997 Plagge, Frank:  
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen
- 32–1997 Neubert, Michael:  
Richtungsregelung beim Tiefbohren
- 33–1998 Sangi, Daryoush:  
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen
- 34–1998 Thielecke, Frank:  
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung
- 35–1998 Vietgen, Jürgen:  
Numerische Simulation duktilen Risswachstums unter Berücksichtigung von Schädigung
- 36–1998 Lär, Bernard:  
Einfluss transientsrer Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik
- 37–1998 Scheld, Christian:  
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks
- 38–1999 Baaran, Jens:  
Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern
- 39–1999 Daros, Carlos:  
Wave propagation in unbounded piezoelectric media of transversely isotropic symmetry

- 40–2000 Nils, Wagner:  
Untersuchung der Boden-Fahrzeug-Interaktion mit gekoppelten Rand- und Finite-Element-Methoden
- 41–2001 Langer, Sabine:  
Schalltransmission durch Isolierverglasung
- 42–2001 Schacht, T.:  
Orientierungsabhängige Rissbildung in duktilen Metallen
- 43–2002 Ackermann, Lutz:  
Simulation der Schalltransmission durch Wände
- 44–2002 Barthold, Franz-Joseph:  
Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrie Probleme
- 45–2002 Böhrnsen, Jens-Uwe:  
Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos
- 46–2002 Zorn, C.:  
Plastisch instabile Verformung aufgrund dynamischer Reckalterung und korrelierten Versetzungsgleitens
- 47–2002 Küsel, M.:  
Wellige Verschleissmuster auf Laufflächen von Eisenbahnradern
- 48–2002 Bross, S.:  
Versetzungsdynamik und Reckalterung als Ursache instabilen Materialverhaltens beim Portevin-Le Chatelier-Effekt
- 49–2002 Vesper, Matthias:  
Modellierung von Korn und Korngrenze in polykristallinen Gefügen
- 50–2003 Steindorf, Jan:  
Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung
- 51–2003 Meyer, Marcus:  
Reduktionsmethoden zur Simulation des aeroelastischen Verhaltens von Windkraftanlagen
- 52–2003 Wittich, Hauke:  
Inhomogene Gleitung bei nahgeordneten CuAl-Legierungen
- 53–2003 Hupfer, Knut:  
Einfluss der Mikrostruktur auf die Festigkeitseigenschaften von Metallschäumen

- 54–2004 Schmelzer, Martin:  
Identifikation der Parameter von Zeitbereichsmodellen linear-viskoelastischer Werkstoffe
- 55–2004 Ostendorf, Michael:  
Geschwindigkeitsmessungen in Silos mit der Particle Image Velocimetry
- 56–2004 Engelhardt, Marek:  
Numerische Verfahren zur Identifizierung von Fehlstellen aus Randdaten
- 57–2005 Keese, Andreas:  
Numerical Solution of Systems with Stochastic Uncertainties - A General Purpose Framework for Stochastic Finite Elements
- 58–2005 Pryl, Dobromil:  
Influences of Poroelasticity on Wave Propagation: A Time Stepping Boundary Element Formulation
- 59–2005 Fries, Thomas-Peter:  
A Stabilized and Coupled Meshfree/Meshbased Method for Fluid-Structure Interaction Problems
- 60–2005 Kayser-Herold, Oliver:  
Least-Squares Methods for the Solution of Fluid-Structure Interaction Problems